Préparation à l'agrégation interne 2021-2022

Espaces Euclidiens

I. Les fondamentaux

Exercice 1 *Les définitions à connaître*

1. Qu'est-ce qu'un espace euclidien ?

2. Qu'est-ce qu'un espace vectoriel orienté ? (indication : dans un espace vectoriel, il y a le choix entre deux orientations.) Qu'appelle-t-on un endomorphisme qui préserve l'orientation ? Doit-on avoir défini une orientation de l'espace pour parler d'un endomorphisme qui préserve l'orientation ?

3. Dans un plan vectoriel réel, quelle structure faut-il pour définir l'angle entre deux vecteurs ?

4. Donner la définition et les caractérisations d'un endomorphisme orthogonal (ou isométrie) d'un espace vectoriel euclidien.

5. Donner la définition et les caractérisations d'un endomorphisme auto-adjoint (ou endomorphisme symétrique) d'un espace vectoriel euclidien.

Exercice 2 *Diagonaliser les endomorphismes auto-adjoints en base orthonormée*

1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\mathrm{mat}_{\underline{e}} u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que u est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^2$, diagonaliser u en base orthonormée.

2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{mat}_{\underline{e}} u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que u est autoadjoint et diagonaliser u en base orthonormée. Écrire matriciellement la formule de changement base

Exercice 3 *Reconnaître une matrice orthogonale*

Compléter la matrice $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale.

Exercice 4 *Reconnaître les isométries en dimension 2*

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\underline{e} = (e_1, e_2)$ une base de E. On munit E du produit scalaire rendant $\underline{e}$ orthonormée et de l'orientation rendant $\underline{e}$ directe (on pourra traiter l'exercice avec $E = \mathbb{R}^2$ et $\underline{e}$ la base canonique).

1. Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est :

$$\mathrm{mat}_{\underline{e}} u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est une rotation et donner sa matrice dans la base $\underline{e'} = (e_2, e_1)$. Déterminer les caractéristiques de la rotation u.

2. Soit $v : E \to E$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est :

$$\mathrm{mat}_{\underline{e}} v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que v est une symétrie orthogonale et déterminer son axe. Donner une base orthonormée $\underline{f} = (f_1, f_2)$ telle que $\mathrm{mat}_{\underline{f}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les bases orthonormées $\underline{b}$ telles que $\mathrm{mat}_{\underline{b}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Interpréter géométriquement l'angle θ tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$.

Exercice 5 *Reconnaître les isométries en dimension 3*

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\underline{e} = (e_1, e_2)$ une base de E. On munit E du produit scalaire rendant $\underline{e}$ orthonormée et de l'orientation rendant $\underline{e}$ directe (on pourra traiter l'exercice avec $E = \mathbb{R}^3$ et $\underline{e}$ la base canonique).

On considère les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\underline{e}$ sont :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ce sont des endomorphisme orthogonaux et donner leurs caractéristiques.

Exercice 6

Soit $O \in \mathrm{O}(3)$. On suppose que son polynôme caractéristique est $P_O(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. Caractériser géométriquement l'application orthogonale de $\mathbb{R}^3$ de matrice O dans la base canonique.

II. Propriétés générales et résultats classiques

Exercice 7 *orthogonalisation simultanée d'une forme quadratique et d'un produit scalaire*

Une conséquence du théorème spectral est que dans un espace euclien, toute forme quadratique possède une base orthogonale qui est orthonormée pour le produit scalaire.

1. Soit E un espace euclidien. Expliquer comment on associe un endomorphisme symétrique à une forme quadratique q sur E et expliquer comment on associe une forme quadratique à un endomorphisme symétrique u de E.

2. Diagonaliser "en base ortonormée" la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère la forme bilinéaire b sur $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Décrire l'orthogonal pour b d'un vecteur de la forme $(1, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. Décrire toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ orthogonales pour b contenant un vecteur de la forme $(1, y)$.

5. Décrire toutes les bases orthogonales pour b qui sont orthonormées pour la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$.

6. Faire le lien avec la question 2.

Exercice 8

1. Quelle est la signature de la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

2. Quelle est la signature de la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 9

Pour chacun des deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^2$ sont les suivantes, dire s'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ rendant l'endomorphisme autoadjoint :

a. $\mathrm{mat}_{\underline{e}} u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **b.** $\mathrm{mat}_{\underline{e}} u = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace euclidien E. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer de deux manières que si $u^* = u$ et $u^k = 0$, alors $u = 0$:

a. en traitant d'abord le cas $k = 2$ par la définition de l'adjoint, puis le cas où k est une puissance de 2.

b. en utilisant le théorème spectral.

Exercice 11

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace euclidien E. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que si $u^* = u$ et $u^k = id$, alors $u^2 = \mathrm{id}$.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces supplémentaire et p la projection sur F parallèlement à G.

1. Montrer de deux manières que p est une projection orthogonale si et seulement si c'est un endomorphisme autoadjoint :

a. en utilisant la définition de l'adjoint.

b. en utilisant le théorème spectral.

2. Montrer que si p est une projection orthogonale, alors pour tout $x \in E$, on a $||p(x)|| \leq ||x||$, c'est-à-dire $|||p||| \leq 1$.

3. Montrer réciproquement que si $|||p||| \leq 1$, alors p est une projection orthogonale.

Exercice 13

Soit E un espace euclidien.

1. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaire et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que :

a. s est un endormorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (c'est-à-dire $F \perp G$).

b. s est un endormorphisme autoadjoint si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

2. Quels sont les endomorphismes de E à la fois orthogonaux et autoadjoints ?

Exercice 14 *Endomorphismes autoadjoints commutants.*

Soit E un espace vectoriel euclien et u, v deux endomorphismes autoadjoints de E.

1. Montrer que $u \circ v$ est autoadjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

2. Montre que si $u \circ v$ est autoadjoint, alors il existe une base orthonormée de E diagonalisant simultanément u, v et $u \circ v$.

Des thèmes classiques de l'agrégation

Exercice 15 *Générateurs du groupe orthogonal*

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\mathrm{O}(E)$ le groupe orthogonal de E, c'est-à-dire le groupe formé des endomorphismes orthogonaux de E. On appelle réflexion de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

On veut montrer que $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

1. Montrer que pour tout endomorphisme orthogonal f et tout sous-espace vectoriel F de E, si F est stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f.

2. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, $u \neq \mathrm{id}$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. Montrer qu'il existe une réflexion s de E telle que $s(x) = u(x)$. Que peut-on alors dire de $\mathrm{vect}(x)$ pour l'endomorphisme $s \circ u$?

3. En déduire le résultat cherché par récurrence sur la dimension de E

4. En précisant la preuve précédente, montrer le résultat plus précis suivant : pour tout $u \in \mathrm{O}(E)$, si $k = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$, alors u est le produit de $n - k$ réflexions et ne peut s'écrire comme produit de moins de $n - k$ réflexions [Goblot, Algèbre linéaire, par. 10.4, p.196].

Exercice 16 *Générateurs du groupe spécial orthogonal*

On va utiliser l'exercice précédent pour montrer que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$ est engendré par les retournements, c'est-à-dire les symétries orthogonales par rapport à un plan de E. Ce résultat est utilisé pour montrer un résultat important classique : le groupe $\mathrm{SO}(3)$, et plus généralement $\mathrm{SO}(n)$ pour $n \geq 3$, est un groupe simple.

1. Montrer tout d'abord que $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}(E)$ d'indice 2.

2. Quelles sont les symétries de $\mathrm{O}(E)$ qui sont éléments de $\mathrm{SO}(E)$?

3. Montrer que si s est une réflexion, alors $-s$ est un produit de retournements. Conclure.

Exercice 17 *Une application du théorème spectral*

Le résultat suivant est utilisé pour montrer l'existence et l'unicité pour tout compact K d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ d'un ellispoïde de volume minimal contenant K (ellispoïde de John-Loewner) [Francinou-Gianella-Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 3, p. 229].

Montrer que le déterminant est logarithmiquement strictement concave sur l'ensemble $\mathrm{Sym}^{>0}(n)$ des matrices symétriques définies positives :

$$\forall A, B \in \mathrm{Sym}^{>0}(n),\ \forall \alpha \in]0,1[,\ \det((1-\alpha)A + \alpha B) > (1-\alpha)\det A + \alpha \det B.$$

Indication : orthogonaliser simultanément A et B.