Équations différentielles linéaires

Exercice 1

Résoudre à chaque fois sur $\mathbb{R}$ le système différentiel (S).

a)

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) & = -x_1(t) + 2x_2(t) + e^{3y} \arctan(3t) \\ x_2'(t) & = 2x_1(t) + 2x_2(t) + 2e^{3t} \arctan(3t) \end{cases}$$

b)

$$(S) : \begin{cases} x'(t) & = 2x(t) - y(t) + 1 \\ y'(t) & = x(t) + 3y(t) + t \end{cases}$$

c)

$$(S) : \begin{cases} x'(t) & = y(t) + t \\ y'(t) & = x(t) - t \end{cases}$$

d)

$$(S) : \begin{cases} x_1'(t) & = 6x_1(t) + 9x_2(t) - 9x_3(t) + e^{3t} \\ x_2'(t) & = 2x_1(t) + 3x_2(t) - e^{3t} \\ x_3'(t) & = 3x_1(t) + 3x_2(t) + 2e^{3t} \end{cases}$$

e)

$$(S) : \begin{cases} x'(t) & = \dfrac{t}{t^2+1} \cdot x(t) + \dfrac{1}{t^2+1} \cdot y(t) + \dfrac{2t^2-1}{t^2+1} \\ y'(t) & = \dfrac{-1}{t^2+1} \cdot x(t) + \dfrac{t}{t^2+1} \cdot y(t) + \dfrac{3t}{t^2+1} \end{cases}$$

f)

$$(S) : \begin{cases} x'(t) & = tx(t) - y(t) + t\cos(t) - t^3 \sin(t) \\ y'(t) & = x(t) + ty(t) + t\sin(t) + t^3 \cos(t) \end{cases}$$

Exercice 2

1. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : \sin(t)y'(t) - 2\cos(t)y(t) = 0$.

   Que peut-on dire de la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?
2. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : x.y''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$.
   a) Déterminer les solutions de $(\mathcal{H})$ développables en séries entières.
   b) Résoudre $(\mathcal{H})$.
3. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{H}) : x^2y''(x) - 4xy'(x) + (x^2+6)y(x) = 0$.
   a) Déterminer les solutions de $(\mathcal{H})$ développables en séries entières.
   b) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

1. Résoudre sur $]0;\pi[$ l'équation différentielle $(E):\ x''(t)+x(t)=\operatorname{cotan}(t)$.
2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, et soit l'équation $(E):\ y''(x)-4y(x)=a|x|+b$.

   Montrer que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ monotone, admettant une limite finie en $+\infty$.

   Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $(E):\ y''+y=f$, sont bornées.
4. Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifiant : $f''(t)+f(t)\geqslant 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

   Montrer que : $f(t)+f(t+\pi)\geqslant 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Soit $(a,\ell)\in\mathbb{C}^2$ tel que : $\operatorname{Re}(a)>0$ et $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ vérifie $\big(f'(t)+af(t)\big)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.

   Montrer que $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.
2. Soit $g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ vérifiant $\big(g''(t)+g'(t)+g(t)\big)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.

   Montrer que $g(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.
3. Généraliser.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle $(\mathcal{H}):\ 3(x^2+x)y''(x)+(8x+3)y'(x)+2y(x)=0$.

1. Rechercher pour $(\mathcal{H})$ une solution développable en série entière autour de 0 et vérifiant la condition $y(0)=1$.
   On précisera l'intervalle I sur lequel la fonction obtenue est solution de $(\mathcal{H})$.
2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles. On remarquera que f est la restriction à I d'une fonction $x\mapsto(1+x)^\alpha$ pour un choix convenable de α.
3. En exploitant les résultats précédents, déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{H})$.
   On en donnera les expressions au moyen des fonctions usuelles.

Exercice 6

Soit $p,q:\ [a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues, et l'équation :

$$(S.L.):\ y''+py'+qy=0$$

1. Soit y une solution non nulle de $(S.L.)$.
   a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.
   b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.
2. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(S.L.)$. On suppose que y_1 admet au moins deux zéros : soit α et β deux zéros consécutifs de y_1.
   a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]\alpha;\beta[$.
   b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]\alpha;\beta[$?

Exercice 7

Soit l'équation $(S.L.)$: $y''(x) + q(x).y(x) = 0$ où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, négative et non nulle sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que si y est une solution réelle de $(S.L.)$, alors la fonction y^2 est convexe.
   b) Montrer que si y est une solution réelle positive de $(S.L.)$ sur un intervalle I, alors y est convexe sur I.
   c) Montrer que la fonction nulle est l'unique solution réelle bornée de $(S.L.)$.
2. Soit φ la solution réelle de $(S.L.)$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \geqslant 1$, puis que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 1$ et que φ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) On suppose qu'il existe $w > 0$ tel que $q(x) \leqslant -w^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(x) \geqslant \operatorname{ch}(wx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Indication : écrire $\varphi'' - w^2\varphi = f$ avec $f(x) = -\big(q(x) + w^2\big)\varphi(x)$, et utiliser la méthode de variation des constantes.

Exercice 8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, et soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

1. a) Déterminer un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $r - 1$ tel que :
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\},\ Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$$
   b) En déduire que $\exp(A) = Q(A)$.
2. a) Résoudre le système différentiel :
$$X'(t) = AX(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & (b) \\ & & \ddots & \\ & (b) & & \ddots \\ & & & & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$
   b) Résoudre $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où $B(t) = nbe^{t(b-a)}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Soit l'équation différentielle : $(\mathcal{H}$: $\quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}.y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1.y'(t) + a_0.y(t) = 0$

On suppose que le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ est scindé et que $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

On définit l'endomorphisme $D : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$ et l'application $I : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{array}$.

On note aussi $\mathcal{S}_\mathcal{H}$ l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_\mathcal{H} = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \operatorname{Ker}\big((D - \lambda_i.I)^{\alpha_i}\big)$.
2. En déduire que : $\quad \mathcal{S}_\mathcal{H} = \Big\{ y : \ t \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{r} P_i(t).e^{\lambda_i.t} \Big|\ P_i \in \mathbb{R}_{\alpha_i - 1}[X] \Big\}$.
3. **Application :** résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t - 3$
   b) $y^{(4)}(t) - 2y''(t) + y(t) = 0$.

Exercice 10

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$. *Indication : poser* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ *et calculer* $f'''(x)$.
2. *Calcul de la transformée de Fourier de la Gaussienne.*

   Calculer pour tout réel x : $\quad F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$
3. Calculer pour tout réel x : $\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{tx-t^2} \mathrm{d}t.$
4. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} \mathrm{d}t \end{array}$.
   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
   b) Calculer $xf'(x) - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   c) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
5. Calculer :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\cos(tx)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(tx)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$$

Exercice 11

Soit y la solution maximale de l'équation différentielle $\quad (\mathcal{H}) : \; y''(t) - t^2 y(t) = 0$ avec les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive et paire.