Dans tout le problème, les espaces vectoriels sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

- On note $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Cet espace vectoriel est muni de sa norme naturelle $\|\cdot\|_\infty$ définie par :
$$\forall \phi \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \|\phi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\phi(x)| \ .$$
On sait que muni de cette norme, $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).

- On note $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que ϕ et ϕ' soient bornées. On admettra qu'il s'agit d'un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{BC^1}$ définie par :
$$\forall \phi \in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \|\phi\|_{BC^1} = \|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty \ .$$

- On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels normés, un homéomorphisme de E sur F est une application bijective de E sur F, continue et dont la bijection réciproque est continue.

- On rappelle que si $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, une application linéaire $L : E \to F$ est continue si et seulement s'il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $x \in E$,
$$\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E \ .$$

Étant donnée une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on considère les applications (en général non linéaires) $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$, dont l'existence sera justifiée en **I-1.**, définies par :
$$\forall \phi \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \mathcal{N}_f(\phi) = f\circ\phi \ ,$$
$$\forall \phi \in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}), \quad \mathcal{L}_f(\phi) = \phi' + f\circ\phi \ .$$

Le but du problème est d'étudier l'inversibilité de l'application $\mathcal{L}_f$, ce qui revient essentiellement à étudier les solutions bornées d'une équation différentielle de la forme $y' + f\circ y = h$, la fonction h étant elle-même continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
On démontrera notamment un cas particulier du théorème suivant :

Théorème. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) L'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.
(ii) La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un homéomorphisme.

La partie I fait établir plusieurs résultats utiles dans les parties suivantes.
La partie II propose une étude limitée au cas où f est linéaire.
La partie III propose l'étude de l'opérateur $\mathcal{N}_f : \phi \mapsto f\circ\phi$ et fait établir l'implication suivante : *si $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme, alors f est un homéomorphisme.*
La partie IV propose d'établir que $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme si f vérifie une hypothèse additionnelle (H) plus restrictive que la stricte monotonie.
Enfin, la partie V propose l'étude d'un exemple.

Partie I : Préliminaires

I-1. Existence de $\mathcal{N}_f$ et de $\mathcal{L}_f$
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Soit $y \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrer que $f \circ y$ est continue et bornée.
On donne ainsi un sens à $\mathcal{N}_f$ comme application de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dans lui-même.

b) Montrer de même que $\mathcal{L}_f$ est bien définie comme application de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

I-2. Un opérateur intégral
Soit $b \in \mathbf{R}_+^*$ et $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Montrer que la formule

$$T_g(x) = e^{-bx} \int_{-\infty}^{x} e^{bs} g(s)\, \mathrm{d}s$$

permet de définir une fonction T_g de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation différentielle linéaire que l'on écrira.

b) Donner un majorant de $\|T_g\|_{BC^1}$ en fonction de b et de $\|g\|_\infty$.

I-3. Caractérisation des homéomorphismes de R
L'objet de cette question est d'établir l'équivalence entre les assertions :
(i) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et bijective.
(ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui-même.

a) On suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et injective. Soit $\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x < y\}$ et Δ la fonction définie sur Π_+ par $\Delta(x, y) = f(x) - f(y)$. En étudiant le signe de Δ sur Π_+, démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$.

b) Justifier que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue.

c) Conclure.

I-4. Solutions d'une équation différentielle non linéaire
Soit y une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + f \circ y = h\ ,$$

où f désigne une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et h une fonction de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Démontrer que si y appartient à $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ alors elle est aussi dans $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Partie II : Le cas linéaire

Soient une fonction $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et un nombre $a \in \mathbf{R}$ fixés. Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}_L) \qquad y' + ay = h\ .$$

On rappelle que les solutions (maximales) de $(\mathcal{E}_L)$ sont définies sur $\mathbf{R}$. On cherche à savoir s'il existe des solutions y de $(\mathcal{E}_L)$ qui appartiennent à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

II-1. On suppose dans cette question que $a = 0$.

a) La fonction h étant donnée, montrer que :

- ou bien toutes les solutions de $(\mathcal{E}_L)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sont bornées ;
- ou bien aucune des solutions de $(\mathcal{E}_L)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ n'est bornée.

b) Montrer que chacun de ces deux cas peut se produire.

II-2. L'objectif de cette question est de montrer que si a est non nul alors l'équation $(\mathcal{E}_L)$ admet une solution bornée sur $\mathbf{R}$ et une seule.

a) On suppose que $a > 0$.
En utilisant la question **I-2.**, mettre en évidence une solution y_0 de $(\mathcal{E}_L)$ qui appartient à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Donner un majorant de $\|y_0\|_{BC^1}$ en fonction de $\|h\|_\infty$ et de a.

b) Démontrer que si $a > 0$ alors $(\mathcal{E}_L)$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbf{R}$.

c) On suppose que $a < 0$. Démontrer que $(\mathcal{E}_L)$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbf{R}$. On pourra introduire la fonction z telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z(x) = y(-x)$.

II-3. On considère la fonction $f : x \mapsto ax$ de $\mathbf{R}$ dans lui-même et on définit l'application linéaire $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ par l'expression : $\mathcal{L}_f(y) = y' + ay$.
Démontrer que f est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme.

Partie III : À propos des opérateurs $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{L}_f$

Dans cette partie, f désigne une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Pour les questions **III-2.** et **III-4.**, on note, pour tout réel α, $h_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction constante $x \mapsto \alpha$.

III-1. Continuité de l'opérateur $\mathcal{N}_f$
On veut établir que $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est continu. Soit $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ convergeant vers g au sens de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

a) Justifier l'existence du nombre réel $\rho = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \|g_n\|_\infty$ et montrer que $\|g\|_\infty \leqslant \rho$.

b) En utilisant la restriction de f à $[-\rho, \rho]$, montrer que $\mathcal{N}_f(g_n)$ tend vers $\mathcal{N}_f(g)$ (au sens de la norme $\| \cdot \|_\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$. Conclure.

III-2. Cas où $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme
On souhaite établir dans cette question que f est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

a) On suppose d'abord que f est un homéomorphisme.
Vérifier que $\mathcal{N}_f$ est bijectif et que $\mathcal{N}_f^{-1} = \mathcal{N}_{f^{-1}}$. En déduire que $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

b) Réciproquement, on suppose que l'opérateur $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur lui-même. Soit $y \in \mathbf{R}$ arbitraire ; justifier l'existence de $\xi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\mathcal{N}_f(\xi) = h_y$. Démontrer que ξ est constante (on pourra introduire, pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction η définie par $\eta(x) = \xi(x + a)$ et considérer $\mathcal{N}_f(\eta)$). En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

III-3. L'opérateur différentiel $\mathcal{L}_f$
Démontrer que $\mathcal{L}_f$ est une application continue de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

III-4. Cas où $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme
Dans cette question, on suppose que l'opérateur $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Soit $y \in \mathbf{R}$ et soit $\xi \in BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\mathcal{L}_f(\xi) = h_y$. Montrer que ξ est une fonction constante.

b) Démontrer que f est surjective.

c) Démontrer que f est injective.

d) En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Partie IV : Un problème de point fixe

Dans cette partie, on considère une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

- **Rappel :** une fonction f réelle de variable réelle est dite $k-$lipschitzienne (k étant un réel positif fixé), ou encore lipschitzienne de rapport k, si on a

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| \ .$$

- On dira que f satisfait la propriété (H) s'il existe deux nombres réels m et M, *strictement positifs*, et tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow \left(m \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant M \right) \ .$$

  On notera qu'on a nécessairement $m \leqslant M$.

IV-1. Dans cette question seulement, on suppose que f est dérivable sur $\mathbf{R}$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que f satisfasse la propriété (H).

On suppose dans toute la suite de la partie **IV** que f satisfait la propriété (H).

IV-2. Démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

IV-3. On pose $k = \frac{m+M}{2}$, et on introduit la fonction réelle de variable réelle $F_k : x \mapsto f(x) - kx$. Démontrer que F_k est lipschitzienne d'un rapport L que l'on déterminera.

IV-4. Soit h et ϕ deux éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Démontrer que la fonction $s \mapsto -F_k(\phi(s)) + h(s)$ est bornée sur $\mathbf{R}$. En déduire que la fonction G qui à h et ϕ fait correspondre

$$G(h,\phi) : x \mapsto e^{-kx} \int_{-\infty}^{x} e^{ks}\big(-F_k(\phi(s)) + h(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

est bien définie et que $G(h,\phi)$ appartient à $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

IV-5. Démontrer que les applications partielles $\phi \mapsto G(h,\phi)$ (pour $h \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ fixée) et $h \mapsto G(h,\phi)$ (pour $\phi \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ fixée) sont lipschitziennes ; on précisera leurs rapports en fonction de L et k.

IV-6. Démontrer que $G(h,\phi)$ appartient à $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et que

$$G(h,\phi)' = k(\phi - G(h,\phi)) - f \circ \phi + h \ .$$

IV-7. Soient deux fonctions h et ϕ dans $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Démontrer que la relation $G(h,\phi) = \phi$ a lieu si et seulement si ϕ appartient à $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et que $\mathcal{L}_f(\phi) = h$.

IV-8. L'opérateur $\mathcal{L}_f$ comme bijection
Soit une fonction $h \in BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Démontrer que $\phi \mapsto G(h,\phi)$ a un unique point fixe dans $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est une bijection.

IV-9. L'opérateur $\mathcal{L}_f$ comme homéomorphisme

a) Soient h_1, h_2, ϕ_1, ϕ_2 des éléments de $BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tels que $\phi_1 = G(h_1,\phi_1)$ et $\phi_2 = G(h_2,\phi_2)$. Déduire de la question **IV-5.** qu'il existe un réel $r > 0$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \leqslant r\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty + \frac{1}{k}\|h_1 - h_2\|_\infty \ .$$

b) Démontrer que l'opérateur $\mathcal{L}_f^{-1} : BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est lipschitzien ; on précisera son rapport.

c) En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to BC^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.

Partie V : Un exemple

On s'intéresse à l'équation :

$$(\mathcal{F}) \qquad \phi' + (2\phi + \sin^2(\phi)) = h\ ,$$

où h est une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

V-1. Vérifier que les résultats de la partie **IV** s'appliquent.

V-2. On suppose dans cette question que h est constante.
Existe-t-il une solution bornée non constante de $(\mathcal{F})$?

V-3. On revient au cas général (h arbitraire dans $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$).

a) Montrer que l'équation $(\mathcal{F})$ a une unique solution bornée ϕ_0.

b) Soit ϕ une solution maximale de $(\mathcal{F})$, a priori définie sur un intervalle ouvert $J =]u, v[$. Démontrer que $\phi' + 2\phi$ est bornée sur J.

c) On suppose que v est fini. On introduit la fonction γ telle que, pour tout $x \in J$, $\gamma(x) = e^{2x}\phi(x)$. Démontrer que γ admet une limite à gauche au point v, et en déduire une contradiction.

d) Déduire de ce qui précède que $J = \mathbf{R}$ et que ϕ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

V-4. On prend désormais $h = \sin$. Soit ϕ une solution arbitraire de l'équation $(\mathcal{F})$ distincte de ϕ_0. On note $\psi = \phi - \phi_0$.

a) Démontrer que la fonction ϕ_0 est périodique (on donnera une période de ϕ_0).

b) Démontrer qu'il existe une fonction w de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que ψ vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi'(x) + 2\psi(x) = w(x)\ .$$

Démontrer que ψ ne s'annule pas.

c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad |\psi(x)| \leqslant |\psi(0)| e^{-x}\ .$$

d) Trouver une constante $\alpha \in \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall c \in \mathbf{R}, \quad \exists (x_1, x_2) \in [c; +\infty[^2, \quad \phi(x_1) < \alpha < \phi(x_2)\ .$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

——— FIN DU SUJET ———