

Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2021-2022.

Mercredi 16 Juin 2021.

Devoir de vacances.

Laurent BONAVERO : laurent.bonavero@ac-grenoble.fr

PRÉSENTATION DU SUJET

Ce sujet de Centrale session 2021 est très bien écrit : il ne comporte pas d'erreurs, les questions s'enchainent de façon pertinente.

La question 4 où l'énoncé suggère de se contenter d'une figure peut se rédiger de façon rigoureuse et plus convaincante qu'une simple figure.

Il est de longueur raisonnable et les meilleurs étudiants sont sans doute capables d'aborder la totalité des questions en 4 heures.

L'épreuve commence par introduire les nombres de Catalan en lien avec les marches aléatoires sur \mathbb{Z} et les chemins de Dyck. Une relation combinatoire permet ensuite de les déterminer à l'aide de leur série génératrice. L'asymptotique des nombres de Catalan permet de comprendre la loi du premier temps de retour en 0 dans les cas symétriques et asymétriques. Dans une deuxième et troisième partie, les nombres de Catalan apparaissent comme termes généraux de matrice de Gram et de déterminants de Hankel dont le calcul termine le sujet, ce calcul s'appuie sur l'étude du système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ associé.

Ce sujet couvre un large spectre du programme (combinatoire, probabilités discrètes, séries entières, séries numériques, intégrales impropres, algèbre bilinéaire, polynômes orthogonaux, raisonnement par récurrence, suites récurrentes doubles, trigonométrie, calculs de déterminants).

RÉVISIONS INDISPENSABLES AVANT DE TRAITER LE SUJET

- (1) Probabilités et combinatoire.
 - (a) Loi de Bernoulli, loi binomiale, nombre de combinaisons à p éléments d'un ensemble à n éléments.
 - (b) Indépendance d'événements et de variables aléatoires.
 - (c) Propriétés de la série génératrice d'une variable aléatoire entière.
- (2) Séries entières.
 - (a) Propriétés élémentaires des séries entières, rayon de convergence, régularité. DSE de $(1+x)^\alpha$.
 - (b) Produit de Cauchy de deux séries entières.
- (3) Intégration sur un intervalle quelconque. Critères usuels d'intégrabilité.
- (4) Algèbre linéaire.
 - (a) Techniques de calcul de déterminants.
 - (b) Calcul matriciel. Produit matriciel.
- (5) Algèbre bilinéaire.
 - (a) Propriétés basiques d'un produit scalaire. Calcul de normes.
 - (b) Orthogonalité. Famille orthogonales.
- (6) Divers.
 - (a) Raisonnement par récurrence simple et double.
 - (b) Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

DEADLINE

Ce devoir est à rendre le 8 Septembre en présentiel ou à envoyer, le plus tôt possible, au format pdf à mon adresse électronique : laurent.bonavero@ac-grenoble.fr