Chapitre III

Actions de groupes par isométries

III.1 Le tétraèdre

Exercice III.1.1. *[Le tétraèdre. [H2G2], Chap. XII proposition 3.12]
Le but de l'exercice est de décrire le groupe des isométries du tétraèdre régulier. On précise que le tétraèdre est un tétraèdre plein.

1. Montrer que si une isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ stabilise un tétraèdre régulier, alors elle permute ses quatre sommets.

2. En déduire que le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

3. Déterminer le cardinal de $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})$ et dresser la liste de ses éléments.

4. Déterminer le cardinal de $\mathrm{Is}^-(\mathcal{T})$ et dresser la liste de ses éléments.

5. Exhiber un morphisme naturel de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathfrak{S}_3$.

Soluce. 1. On notera $\mathcal{T}$ le tétraèdre. On sait qu'il possède quatre sommets S_1, S_2, S_3 et S_4. De plus, il est convexe, c'est-à-dire que si M et N sont deux points de $\mathcal{T}$, alors, le segment $[MN]$ est entièrement dans $\mathcal{T}$.

Définition : $S \in \mathcal{T}$ est dit extrémal si la condition suivante est vérifiée

$$\forall M,\, N \in \mathcal{T},\, S \in [MN] \Longrightarrow S = M \text{ ou } S = N.$$

Nous allons tout d'abord montrer que l'ensemble des sommets du tétraèdre est exactement égal à l'ensemble de ses points extrémaux, puis qu'une isométrie du tétraèdre stabilise l'ensemble de ses points extrémaux.

On sait qu'une application affine envoie un segment sur un segment. La proposition suivante s'en déduit :

Proposition 0 : Sur un segment $[AB]$, les points extrémaux sont A et B. Soit $g \in \mathrm{Is}(\mathcal{T})$, alors g envoie un point extrémal de $\mathcal{T}$ sur un point extrémal de $\mathcal{T}$.

Preuve :

La première assertion découle de la définition. Montrons la seconde.

Soient S un point extrémal de $\mathcal{T}$ et $g \in \mathrm{Is}(\mathcal{T})$. Notons $S' = g(S)$. Montrons que S' est extrémal.

Soient $M', N' \in \mathcal{T}$, $M' \neq N'$, tels que $S' \in [M'N']$. On pose

$$M := g^{-1}(M'),\ N := g^{-1}(N').$$

Comme g^{-1} est une application affine, elle envoie le segment $[M'N']$ vers le segment $[g^{-1}(M')g^{-1}(N')]$. De plus, g^{-1} stabilise $\mathcal{T}$. Donc $S = g^{-1}(S')$ est dans $[g^{-1}(M')g^{-1}(N')] = [MN] \subset \mathcal{T}$. Vu que S est extrémal, on a $S = M$ ou $S = N$, et donc $S' = M'$ ou $S' = N'$. Ce qui prouve que S' est extrémal.

Remarque : On s'est servi uniquement du fait que g est affine, et non du fait qu'elle conserve les longueurs.

Proposition 1 : S est un sommet du tétraèdre si et seulement si S est extrémal.

Preuve :

Soit S un point extrémal de $\mathcal{T}$. Montrons que S est un sommet.

Si S est sur une arête, il est en particulier extrémal sur l'arête. D'après la propriété 0, c'est donc un sommet.

Supposons que S est sur une face, disons F. Projetons S, à partir d'un sommet S' de F, sur l'arête opposée à S'. Soit P' le point ainsi obtenu. Le tétraèdre étant convexe, le segment $[S'P']$ ainsi obtenu reste dans le tétraèdre. Comme S est extrémal sur ce segment, puisqu'il l'est dans le tétraèdre, d'après la proposition 0, $S = S'$ ou P'. D'après ce qui précède, dans les deux cas, S est un sommet.

Si S est un point intérieur au tétraèdre, on projette S, à partir d'un sommet, disons S'', sur la face opposée, disons F'', à S''. On obtient un point P'' de F''. Par convexité, le segment $[S''P'']$ reste dans le tétraèdre. Puis on applique le raisonnement précédent pour affirmer que S est un sommet.

Montrons que tout sommet du tétraèdre est extrémal. On rappelle que S_1, S_2, S_3, S_4 sont les sommets de $\mathcal{T}$. Comme les 4 sommets de $\mathcal{T}$ ne sont pas coplanaires, (S_1, S_2, S_3, S_4) constitue un repère de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Dans ce repère, le tétraèdre (plein) $\mathcal{T}$ est l'ensemble des points M de coordonnées (x_1, x_2, x_3), avec $0 \leq x_i$ et $\sum_i x_i \leq 1$. Supposons par l'absurde que l'origine S_1 soit dans $[MM']$, avec $M = (x_i)$, $M' = (x'_i)$ sur le tétraèdre. Alors S_1 est barycentre, à coefficients positifs, de (M, α), (M', α'). On peut de plus supposer que les coefficients sont strictement positifs (sinon, on aurait tout de suite $S_1 = M$ ou M'). Or, $\alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha'(x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 0, 0)$, avec $0 < \alpha, \alpha'$ et $\alpha + \alpha' = 1$, avec les x_i, x'_i positifs, implique $(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 0, 0)$. Ceci implique $M = M' = S_1$. Ce qui prouve que S_1 est extrémal.

Notons que l'on peut envoyer un sommet sur un autre sommet par une application affine (par exemple par une rotation d'ordre 3). On en déduit par la proposition 0 que tous les S_i sont extrémaux.

Par la proposition 1, on a alors : si $g \in \mathrm{Is}(\mathcal{T})$, alors g permute les 4 sommets de $\mathcal{T}$.

2. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des sommets (et donc des points extrémaux). Montrons que $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$ est isomorphe au groupe des permutations $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$:

   Considérons

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathrm{Is}(\mathcal{T}) &\to \mathfrak{S}(\mathcal{E}) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ g &\mapsto \phi(g)\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ &\qquad\qquad S \mapsto g(S) \end{aligned}$$

   L'application ϕ est juste *l'application restriction*, qui envoie g, qui est une application de l'espace affine dans lui-même, sur sa restriction à l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. A ce titre, il s'agit d'un morphisme de groupes (il conserve la loi $\circ$).

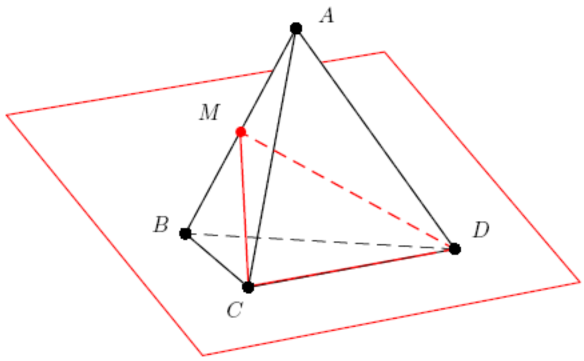
   Montrons que ϕ est injectif.

   Soit $g \in \mathrm{Is}(\mathcal{T}) \mid \phi(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Autrement dit, g laisse fixes les 4 sommets. Or, on a vu que (S_1, S_2, S_3, S_4) constitue un repère affine de $\mathbb{R}^3$. Donc g stabilise un repère de $\mathbb{R}^3$, c'est donc l'identité.
   Par suite, on a $\ker \phi = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{T}}\}$ et donc ϕ est injectif.

   Montrons que ϕ est surjectif.

   On montre que $\mathrm{Im}\,\phi$ contient un système de générateurs de $\mathfrak{S}_4$: les transpositions.

   Pour cela, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}\,\phi$ contient (12). Les autres transpositions s'y trouveront alors aussi par symétrie. On cherche donc une isométrie (forcément unique par ce qui précède) qui laisse fixes S_3 etS_4 et qui échange S_1 et S_2. Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[S_1S_2]$, c'est-à-dire le plan passant par S_3 et S_4 et le milieu de $[S_1S_2]$, voir figure ci-dessous



D'où l'isomorphisme annoncé.

3. Maintenant, on remarque que tout sous-groupe du groupe affine qui fixe un point peut être assimilé à un sous-groupe du groupe linéaire ; on peut par exemple lui appliquer le déterminant. Le sous-groupe $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})$ est le noyau du déterminant restreint à $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$. Comme l'image du déterminant restreint à $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$ prend exactement deux valeurs, 1 et -1, il vient que le sous-groupe $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$. Via l'isomorphisme entre $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$ et $\mathfrak{S}_4$, le sous-groupe $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T})$ est donc isomorphe à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$. Or, on sait qu'il n'y a qu'un seul tel sous-groupe : le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$. On a donc, $\mathrm{Is}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{A}_4$.

4. $|\,\mathrm{Is}^-(\mathcal{T})| = 24 - 12 = 12$.

   Remarque. Ce n'est pas un sous-groupe (le vilain !). En revanche, c'est une belle classe à gauche (ou à droite)...

5. Dans la suite, on appelle *bimédiane* du tétraèdre, une droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées. On remarque que le tétraèdre possède 3 bimédianes, qu'il est plus facile de visualiser lorsque le tétraèdre est inscrit dans le cube, comme dans la figure III.3 : ces trois bimédianes sont alors les axes de symétrie du cube qui traversent par les milieux ses faces opposées. Par exemple, on voit parfaitement qu'elles sont deux à deux orthogonales.

   Le groupe $\mathrm{Is}(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{S}_4$ envoie une bimédiane sur une autre bimédiane. Il agit donc naturellement sur l'ensemble des bimédianes qui est de cardinal 3. On a donc construit, par définition d'une action, un morphisme de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathfrak{S}_3$.

   Ce morphisme est surjectif : un 4-cycle a pour image une transposition. On peut le voir encore une fois en inscrivant le tétraèdre dans le cube et en utilisant la réalisation du 4-cycle faite ci-dessus.

   Le noyau est le groupe de Klein : {e, composées de 3 transpositions à supports disjoints}. Ces transpositions correspondent aux 3 retournements (rotation d'angle π) autour des trois bimédianes.

III.2 Le cube

Exercice III.2.1 (Le groupe du cube [H2G2]. , Chap. XII]

1. Montrer, en remarquant que l'on peut inscrire deux tétraèdres dans le cube (voir figure III.3), que le groupe G des isométries positives du cube contient un sous-groupe d'indice 2 isomorphe à $\mathfrak{A}_4$. On obtient, en particulier, que G est d'ordre 24.
2. En déduire, en faisant agir G sur les grandes diagonales du cube, que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Soluce.

1. Notons G le groupe des isométries positives du cube et $\mathcal{T} := \{T_1, T_2\}$ l'ensemble des deux tétraèdres inscrits dans le cube. Comme vu précédemment avec le tétraèdre, le groupe G respecte l'ensemble des sommets du cube. Il en résulte que G agit sur l'ensemble des tétraèdres inscrits dans le cube. Donc G s'envoie dans $\mathfrak{S}(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{S}_2$ par un morphisme d'action ϕ.

   Par une rotation d'ordre 4 autour d'un axe passant par le milieu de faces opposées, on voit que l'on échange T_1 et T_2. Le morphisme ϕ est donc surjectif.

   Montrons que $\ker\phi \simeq \mathfrak{A}_4$. Un élément de $\ker\phi$ est un élément qui laisse fixe le tétraèdre T_1 (du coup, il laissera automatiquement fixe l'autre tétraèdre). Il en résulte que $\ker\phi$ s'injecte dans le groupe des isométries positives du tétraèdre, c'est-à-dire $\mathfrak{A}_4$.

   Montrons la surjectivité. Il suffit pour cela de montrer qu'un système de générateurs de $\mathfrak{A}_4$ est dans l'image, c'est-à-dire qu'un système de générateurs du groupe des isométries du tétraèdre se réalise comme système d'isométries positives du cube. Un bon système de générateurs [1] de $\mathfrak{A}_4$ est l'ensemble des 3-cycles. On voit que les 3-cycles se réalisent comme rotations autour des grandes diagonales du cube.

   Conclusion, $H := \ker\phi \simeq \mathfrak{A}_4$ vérifie $G/H \simeq \operatorname{Im}\phi \simeq \mathfrak{S}_2$; il est bien d'indice 2.
2. On fait agir G sur les 4 grandes diagonales du cube. On vérifie que l'action est bien définie (une rotation respecte les distances, elle envoie bien une grande diagonale sur une grande diagonale). On obtient un morphisme d'action de G dans $\mathfrak{S}_4$. Il est surjectif, car les transpositions de $\mathfrak{S}_4$ sont réalisées par les rotations d'ordre 2 passant par les milieux d'arêtes opposées. Ce morphisme est injectif, puisqu'il est surjectif et que l'ordre des groupes est le même, 24.

---

1. Comment différencier un bon système d'un mauvais système de générateurs ? Alors, ben, le mauvais système de générateurs, il est là, il voit $\mathfrak{A}_4$, et il le génère quoi, pfouah ! Mais le bon système de générateurs, il voit $\mathfrak{A}_4$, il le génère... Mais c'est un bon système de générateurs.

III.3 Dictionnaires

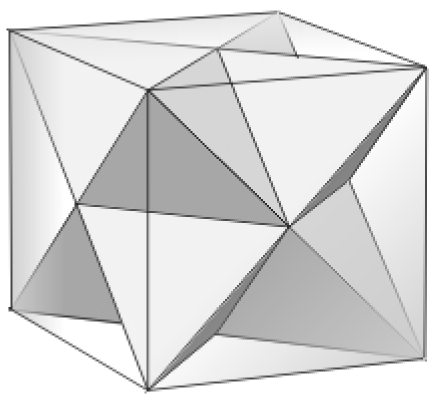
Nombre	Ordre	Isométries de $\mathcal{T}$	Permutations de $\mathfrak{S}_4$
1	1	Id	Id
8	3	rotation d'axe sommet-centre de face opposée	3-cycle
3	2	rotation d'angle π passant par le milieu de 2 arêtes opposées	produit de 2 transpositions à supports disjoints

Nombre	Ordre	Isométries de $\mathcal{T}$	Permutations de $\mathfrak{S}_4$
6	2	symétrie par rapport à un plan médiateur	transposition
6	4	composée d'une symétrie et d'une rotation (*)	4-cycle

(*) La composée d'une rotation et d'une symétrie mérite que l'on s'y attarde un peu.

Une première approche consiste à remarquer l'égalité $(123)(34) = (1234)$. Lorsque l'on bascule cette égalité dans $\mathrm{Is}(\mathcal{T})$ via l'isomorphisme obtenu, on voit que pour obtenir la permutation circulaire $(S_1S_2S_3S_4)$, il faut composer une rotation d'ordre 3 autour de la droite médiane passant par S_4 avec la symétrie par rapport au plan médiateur de S_3 et S_4. On pourrait reprocher à cette décomposition de ne pas être unique. Effectivement, un théorème donne une condition d'unicité pour la décomposition de l'antidéplacement $(S_1S_2S_3S_4)$ si la droite médiane et le plan médiateur sont orthogonaux. Ce qui n'est pas le cas.

Pour y remédier, on considère dans la figure III.3 qui suit les deux tétraèdres inscrits dans le cube :



Pour obtenir un 4-cycle, il suffit de composer une rotation d'ordre 4 autour de l'axe vertical du cube avec la symétrie par rapport au plan orthogonal à cet axe. Le problème est que l'on n'a pas décomposé en deux isométries du même tétraèdre, mais en deux isométries qui échangent les deux tétraèdres inscrits dans le cube. Mais faut savoir ce qu'on veut !

Nombre	Ordre	$\mathrm{Is}^+(C_6)$	Permutations de $\mathfrak{S}_4$
1	1	Id	Id
8	3	rotation d'axe sommet-sommet opposé	3-cycle
3	2	rotation d'angle π passant par le centre de 2 faces opposées	produit de 2 transpositions à supports disjoints
6	2	rotation d'angle π passant par le centre de 2 arêtes opposées	transposition
6	4	rotation d'angle $\pm\pi/2$ passant par le centre de 2 faces opposées	4-cycle

FIGURE III.1 – Isomorphisme entre $\mathrm{Is}^+(C_6)$ et $\mathfrak{S}_4$