Partie IV On a

$$\mathcal{C}([a,b],[c,d]) \subset \underbrace{\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})}_{\text{complet (partie II)}}$$

Notons que $\mathcal{C}([a,b],[c,d])$ est une partie fermée de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$:

Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a,b],[c,d])^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

On a $\forall x \in [a,b]$, $\forall n$, $c \leq f_n(x) \leq d$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $c \leq f(x) \leq d$ et donc que $f \in \mathcal{C}([a,b],[c,d])$. $\blacksquare$

Ainsi, $\mathcal{C}([a,b],[c,d])$ est une partie fermée d'un espace complet donc est lui-même complet.

Partie V

Préambule. Voici le théorème de C-L au programme de l'Agreg interne.

Thm (C.L non linéaire)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.
Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

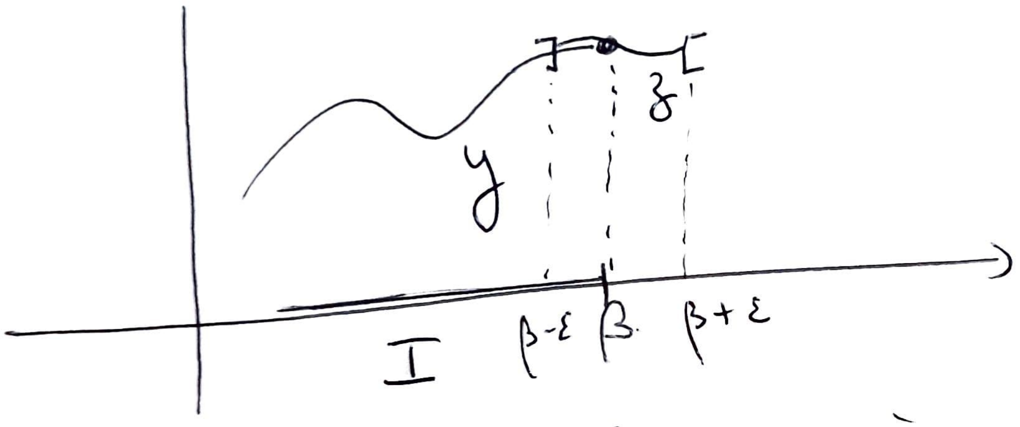
possède une unique solution maximale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0, de classe C^1.

Remarque 1
L'intervalle I est ouvert :
Par l'absurde, si $I = (\alpha, \beta]$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(\beta) = y(\beta) \end{cases}$$ possède une unique

solution locale définie sur un intervalle

$J_\varepsilon =]\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon[$



,

ce qui permet de prolonger y à un intervalle plus gros que I, ceci contredit la maximalité de I. $\boxtimes$

<u>Remarque</u> 2 (essentielle pour les études qualitatives).

Ecrivons $I =]\alpha, \beta[$.

<u>Théorème</u> : Si $\beta < +\infty$, alors y n'est pas bornée au voisinage de β.

dem par l'absurde, si y est bornée au voisinage de β, l'intégrale impropre

$$\int^{\beta} f(s, y(s))\, ds$$ est convergente, donc

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$ converge en β

et y se prolonge en une fonction C^1 sur $]\alpha, \beta]$, solution du problème de Cauchy, ceci contredit la remarque 1.

Preuve dans le cas autonome : f ne dépend pas de t. Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1.

$$(P) \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 . \end{cases}$$

Comme dans le cas linéaire, (P) est équivalent à $x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\, ds$.

Comme f et f' sont continues sur le segment $[x_0 - 1, x_0 + 1]$, elles y sont bornées donc $M = \sup_{[x_0-1, x_0+1]} |f|$ et $k = \sup_{[x_0-1, x_0+1]} |f'|$

sont bien définies

(3) Soit $x \in \mathcal{C}([-\tau, \tau], [x_0-1, x_0+1])$

Pour tout $t \in [-\tau, \tau]$,

$$T(x)(t) - x_0 = \int_0^t f(x(s))\, ds$$

donc $|T(x)(t) - x_0| \leq |t| \times M \leq M\tau \leq 1$

donc $T(x)(t) \in [x_0-1, x_0+1]$ et donc

$T(x) \in \mathcal{C}([-\tau, \tau], [x_0-1, x_0+1])$

(4) Soient $x, y \in \mathcal{C}([-\tau, \tau], [x_0-1, x_0+1])$

Pour tout $t \in [-\tau, \tau]$,

$$T(x)(t) - T(y)(t) = \int_0^t \left(f(x(s)) - f(y(s))\right) ds$$

A l'aide de l'I.A.F, on a (si $t \geq 0$)

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq \int_0^t k\, |x(s) - y(s)|\, ds$$

$$\leq k \|x-y\|_\infty |t|$$

$$\leq k\tau \|x-y\|_\infty .$$

Et donc

$$\| T(x) - T(y) \|_\infty \leq k\tau \, \|x - y\|_\infty .$$

(5) Si $\tau < 1/k$, l'opérateur T est contractant et possède donc un unique point fixe x, solution du problème de Cauchy sur $[-\tau, \tau]$.