Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Partie I $A \subset E$, A fermé, E complet.

$f : A \to A$, contractante.

(1) f possède au plus un point fixe.

(2) Si $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in A$.

Alors (réc) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$

puis $\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - x_{p-1} + \dots + x_{q+1} - x_q\|$

$$\leq \sum_{i=q}^{p-1} k^i \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{k^N}{1-k} \|x_1 - x_0\| \text{ si } p, q \geq N$$

Donc (x_p) est de Cauchy ; $x_p \to a \in A$.
(A fermée).

Et $f(a) = a$.

(4) Si h^{om} est contractant, alors h^m possède un unique point fixe a.

On a $h^m(a) = a$ et

$$h^{m+1}(a) = h^m(h(a)) = h(a)$$

donc $h(a) = a$ (unicité du point fixe de h^{om}).

Si b est un point fixe de h, alors b est un point fixe de h^{om} donc $a = b$.

Partie II

Rappel : pour montrer qu'un evn de référence est complet, il y a 3 étapes :

Etape 0 : On se donne une suite de Cauchy $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

Etape 1 : On fabrique la limite potentielle, notée a.

Etape 2 On vérifie que $a \in E$.

Etape 3 On vérifie que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.

Exemple 1 : $E = \mathcal{C}([a,b], F)$, $\| \|_\infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p,q \geq N, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

Etape 1 : Soit $x \in [a,b]$ fixé.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

$\exists N, \forall p,q \geq N, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$

En particulier, $\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \leq \varepsilon$

Donc $(f_p(x))$ est une suite de Cauchy dans F.

F complet $\Rightarrow f_p(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} f(x)$.

Etape 2 Montrons que f est continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que :

$\forall p,q \geq N \quad \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

Pour $x \in [a,b]$, on a :

$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$.

$q \to +\infty$: $\quad \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

On passe au sup :

$\|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

On a montré que f est limite uniforme de fonction continues, DONC f est continue

et **Etape 3** $f_n \to f$ uniformément

donc $f_n \to f$ dans E.

Partie III

$$(P)\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

$$(P) \Leftrightarrow X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))ds$$

pour tout t.

Par récurrence, montrons que

$\forall X, Y \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$; $\forall t \in [a,b]$,

$$\| T^m(X)(t) - T^m(Y)(t) \| \leq \frac{|t-t_0|^m M^m}{m!} \|X-Y\|_\infty$$

où $X \mapsto \left(t \mapsto T(X)(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))ds \right)$

Or,

$$T^{m+1}(X)(t) - T^{m+1}(Y)(t)$$

$$= T(T^m(X))(t) - T(T^m(Y))(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t} A(s)\left(T^m(X)(s) - T^m(Y)(s) \right) ds$$

Donc (si $t \geq t_0$),

$$\| T^{m+1}(X)(t) - T^{m+1}(Y)(t) \|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|A(s)\|}_{\leq M} \; \underbrace{\| T^m(X)(s) - T^m(Y)(s) \|}_{\underset{HR}{\leq}} \, ds$$

$$\leq M \times \frac{M^m}{m!} \|X-Y\|_\infty \underbrace{\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^m \, ds}_{= \frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)}}$$

$$= \frac{M^{m+1}}{(m+1)!} |t-t_0|^{m+1} \|X-Y\|_\infty .$$

$\boxtimes$

On en déduit que

$\forall X, Y$,

$$\| T^m(X) - T^m(Y) \|_\infty \leq \underbrace{\frac{|b-a|^m M^m}{m!}}_{\leq \frac{1}{2} \text{ pour } m \text{ grand.}} \|X-Y\|_\infty .$$

donc T^m est contractant pour m grand.

Partie I + Partie II

$\Rightarrow$ T possède un unique point fixe $X \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$:

$$\forall t, \quad \underset{\underset{T(X)(t)}{\parallel}}{X(t)} = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)X(s) + B(s)\right) ds .$$