Université Grenoble Alples *Topologie* *Année 2020-2021*
Agrégation Interne de Mathématiques

I. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$

1) On suppose que f est croissante, set soit $A = \{x \in [0,1]\ ;\ f(x) \geq x\}$

   a) Montrer que A possède une borne supérieure, notée c

   b) Nontrer que $f(c)$ est un majornat de A

   c) En déduire que c est un point fixe de f

2) et si on remplace l'hypothèse f croissante par f continue ?

II. Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telle que $f \circ g = g \circ f$

1) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus petit et un plus grand élément (α et β)

2) En déduire quíl existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$

III. Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$

1) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure

2) On note $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$

   a) Montrer que si $a > 0$ alors $G = a\mathbb{Z}$

   b) Montrer que si $a = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$

3) Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$, et que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que la somme de deux fermés d'un espace métrique n'est pas nécessairement un fermé

IV. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable (I intervalle de $\mathbb{R}$)

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que $f'(a)f'(b) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$

2) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (théorème de Darboux)

V. Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, et $A, B \subset E$

1) On suppose que A est ouvert de $(E, ||.||)$. Montrer que $A + B$ est ouvert dans $(E, ||.||)$

2) $A = \{(x, \frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}_+^*\}$ et $B = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$

   a) Montrer que A et B sont deux fermés de $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$

b) $A+B$ est-il un fermé de $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$?

c) Détreminer $d_\infty(A,B)$

VI. Soient A et B deux fermés disjoints d'un espace métrique (E,d). Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints de (E,d) dont l'un contient A et l'autre contient B

VII. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On pose $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Montrer que $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$

VIII. Soient (E,d) un espace métrique, et A et B deux parties non vides de E. Montrer que si A est compacte, B est fermée, et $A \cap B = \emptyset$, alors $d(A,B) > 0$

VIIII. théorème de point fixe pour les compactes

Soit (E,d) un espace métrique compacte. $f : E \to E$ une fonction qui vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tout $x, y \in E$, avec $x \neq y$

1) Montrer que f possède un unique point fixe c

2) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in E$, et $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que cette suite converge vers c

   indication: utiliser la suite $\{d(x_n, c)\}_{n\in\mathbb{N}}$

X. Dilatation

Soit (E,d) un espace métrique compact, et f une dilatation de E (i.e. $f : E \to E$ une application qui vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$ pour tout $x, y \in E$). Soit $x, y \in E$

1) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que les suites $\left(f^{\varphi(n)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(f^{\varphi(n)}(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)$

3) En déduire que $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$

4) Conclure que f est une isométrie bijectuve

XI. Soit C une partie convexe et compacte dún expace vectoriel normé $(E, ||.||)$, et $f : C \to C$ une application qui vérifie $||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$ pour tout $x, y \in C$. Montrer que f possède au moins un point fixe

indication: soit $a \in C$, *et* g_n *l'application déinie sur* C *par* $g_n(x) = \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})f(x)$

XII. théorème de Riesz

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé

1) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E

a) Montrer que $\forall x \in E$, il existe $\hat{x} \in F$ tels que $||x - \hat{x}|| = d(x, F)$

b) En déduire que si $F \neq E$, alors il existe $u \in F$ tels que $||u|| = 1$ et $d(u, F) = 1$

2) Montrer alors qui si E est de dimension infinie, il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la sphère unité $S(0,1)$ telle que $||u_m - u_n|| \geq 1$ si $m \neq n$

3) Conclure que E est de dimension finie si et si seulement si $B_F(0,1)$ est compacte (théorème de Riesz)

XIII. théorème de Dini

1) Soit (E, d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que:

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une fonction f continue sur E
- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, on pose $F_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}; f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon\}$

a) Montrer que $F_{n,\varepsilon}$ est une partie compacte de E

b) Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$, et en déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0,\varepsilon} = \emptyset$

c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E

2) Soit $p_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $p_0(x) = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x))^2 \end{array}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

XIV.

1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $B([a,b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel de fonctions définies sur $[a,b]$ et bornées.

a) Montrer que $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et

$$\begin{array}{rcl} ||.||_\infty : B([a,b], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sup_{t\in[a,b]}(|f(t)|) \end{array}$$

est une norme sur $B([a,b], \mathbb{R})$

b) Montrer que $(B([a,b], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach

2) Montrer que $(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach

XV. Soient $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, et

$$\begin{array}{rcl} N : E & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & |f(x)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} (|f'(t)|) \end{array}$$

1) Montrer que N est une norme sur E

2) Montrer que (E, N) est un espace de Banach

3) N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?

XVI. Montrer que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), ||.||_1)$ 'est pas un espace de Banach

XVII. Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est de Banach si et seulement si tout série $\sum u_n$ normalement convergente est convergente

XVIII. On not $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que la série $\sum |x_n|^2$ converge

1) Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que la série $\sum \overline{x_n} y_n$ converge

2) En déduire que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$

3) Montrer que

$$\begin{array}{rcl} <.,.>: \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n} y_n \end{array}$$

est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$

4) Montrer que $(\ell^2(\mathbb{N}), ||.||)$ est un espace de Hilbert

XIX. En utilisant le théorème du point fixe dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni d'une norme adéquate, montrerque l'équation

$$u(t) = te^{1+\sin^2 t} + \int_0^1 \min(s,t)\cos(u(s))ds \ , \ 0 \le t \le 1$$

admet une solution unique u_0 dans E

indication: on pourra calculer $m(t) = \displaystyle\int_0^1 \min(s,t)ds$

XX. <u>théorème de d'Alembert-Gauss</u>

Soit $p(z)$ un polynôme non constant (à coefficient réels ou complexes). Montrer que p admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

indication: Montrer que $|p|$ atteint son minimum en un point z_0, puis que $p(z_0) = 0$

XXI. Soit (E,d) un espace métrique complet, $f : E \to E$ ayant une itérée f^p contractante. Montrer que:

1) f possède un point fixe etun seul a

2) pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\infty}$ définie par $x_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = f(X_n)$ converge vers a

XXII. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, non identique à 1, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer qu'il existe une unique fonction f dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, solution de l'équation fonctionnelle: $f(0) = \alpha$ et $f'(x) = f(\varphi(x))$

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$, et $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, où $g(x) = \alpha + \displaystyle\int_0^x f(\varphi(t))dt$

Montrer que T^2 est contractante, puis conclure

XXIII. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_infty$. On définit pour toute f de E, $T(f)$ par:

$$T(f)(t) = \int_0^t \left(\int_0^x uf(u)\right) dx$$

Montrer que T est bien définie, puis qu'elle est contractante.
En déduire que l'équation différentielle $f''(t) - tf(t) = 0$ admet une unique solution f tekke que $f'(0) = f(0) = 0$, la fonction nulle

XXIV. Soit

$$\begin{array}{rcl} ||.|| : \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}_+ \\ \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k x^k & \mapsto & \max_{0\leq k\leq n}(|a_k|) \end{array}$$

1) Montrer que $||.||$ est une norme sur $\mathbb{R}[x]$

2) L'application

$$\begin{array}{rcl} D : \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ p & \mapsto & p' \end{array}$$

est-elle continue ?

3) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & p(c) \end{array}$$

est continue si et seulement si $|c| < 1$. Déterminer dans ce cas $|||\varphi|||$

XXV. On munit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $||.||_infty$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n} f(\frac{1}{n}) \end{array}$$

est continue, et déterminer sa norme. Cette norme est-elle atteinte ?

XXVI. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$, et soit $g \in E$ et

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x)g(x)dx \end{array}$$

1) Montrer que φ est une forme linéaire continue

2) Déterminer $|||\varphi|||$ lorsque g est une fonction positive, puis lorsque g est la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 1/2$

3) Déterminer $|||\varphi|||$ pour une fonction g quelconque

XXVII. Soit $E = \mathcal{C}([0,\pi/2],\mathbb{R})$ et soit $T : E \to E$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \ , \ \forall f \in [0,1] \ , \ \text{et } x \in [0,1]$$

1) On munit E de la norme $||.||_\infty$. Montrer que T est continue et calculer $|||T|||$

2) On munit E de la norme $||.||_1$. Montrer que T est continue et calculer $|||T|||$

3) On munit E de la norme $||.||_2$. Montrer que T est continue et calculer $|||T|||$

   indication: on pouurra utiliser la formule de Parseval

XXVIII. Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien. Montrer que

$$A = \{(x,y) \in E^2 \ ; \ \{x,y\} \text{ libre}\}$$

est un ouvert de $E \times E$

XXVIV. opérateur intégrale de Fredholm
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_\infty$, et soit $K \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1],\mathbb{R})$

1) Montrer qu'on définit une applicaltion linéaire continue φ de E dans E, en posant pour $f \in E$: $\varphi(f)(x) = \int \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$

2) Justifier l'existence d'un $c \in [0,1]$ tel que

$$\int_0^1 |K(c,t)|dt = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,t)|dt$$

3) On suppose que $\forall t \in [0,1], K(c,t)$ est de signe positif. Calculer $|||\varphi|||$

4) a) Montrer que si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints d'un e.v.n. $(E, ||.||)$, alors il existe une fonction continue $g : E \to [-1,1]$ tel que:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{sur } F_1 \\ -1 & \text{sur } F_2 \end{cases}$$

b) Calculer $|||\varphi|||$

indication: on pourra utiliser, pour $\varepsilon > 0$, $F_\varepsilon = \{t \in [0,1]; K(c,t) \geq \varepsilon\}$ *et* $F_0 = \{t \in [0,1]; K(c,t) \leq 0\}$