I.

1) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$

2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t^n)dt$

3) Convergence et calcul de: a) $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt$, b) $\int_0^\infty \frac{\ln t}{t^2-1}dt$

4) Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx$

II. Soit l'intégrale $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$

1) a) Montrer que $\forall n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

d) En déduire que $I_n \sim_\infty \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$

2) a) Montrer que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$

b) En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

III.

1) Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{a+nb}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}^*$

2) Calculer: a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{1+3n}$, b) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{1+4n}$

IV.

1) a) Montrer que $\int_0^1 n\ln(1+t^n)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$

b) En déduire que $\int_0^1 n\ln(1+t^n)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{12}$

2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)n\ln(1+t^n)dt$

V. Intégrale de Dirichlet

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\pi/2} e^{-xe^{-it}}dt = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-x)^n}{n!}\left(\int_0^{\pi/2} e^{-int}dt\right)$

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right) dt$

3) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge, puis déterminer sa limite

VI.

1) Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta}\frac{(1-(e^{i\theta}t)^n}{1-e^{i\theta}t}dt$

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge, et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta}\frac{1}{1-e^{i\theta}t}dt$$

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos\theta)$

2) a) Montrer que $\forall \theta \in]0,\pi[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2}$

b) Dessiner le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$

VII. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}dt$

1) Justifier la définition de f, et montrer que f est impaire

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et déterminer f'

3) Cacluler $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

VIII. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$

1) Montrer que f est dérivable, et calcuer f'

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

IX. Défintion, dérivabilité et calcul de $f : x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x dt$

X. Soit $f : x \to \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1+x\cos^2 t)dt$

1) Déterminer le domaine de définition D de f

2) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$, et déterminer f'

3) Calculer $f(x)$ pour $x \in D$

XI.

1) Montrer que $\forall x > 0$: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}dt = \int_0^{x} \frac{\ln t}{t^2-1}dt$

2) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt$

XII. Soit $f : x \to \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)d\theta$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Calculer $f(x)$

XIII.

1) a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge

b) La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est-elle intégrable ?

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}dt$

3) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$

XIV. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ ..
Montrer que $\forall s > s_0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ converge

XV. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur sur $\mathbb{R}^*$

2) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$: $xf'(x) - f(x)$, et en déduire que $\forall x > 0$: $f''(x) = f(x)$

3) Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

XVI. Irrationnalité de π^2:

On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ telle que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, et soit pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $N_n = \pi a^n \displaystyle\int_0^1 P_n(t)\sin(\pi t)dt$

1) Montrer que $N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) Montrer que

$$N_n = a^n(P_n(1)+P_n(0)) - \frac{a^n}{\pi^2}(P_n''(1)+P_n''(0)) + \ldots + (-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-2}}(P_n^{(2n-2)}(1)+P_n^{(2n-2)}(0)) +$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-1}} \int_0^1 P_n^{(2n)}(t)\sin(\pi t)dt$$

3) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} : P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$

4) Conclure

XVII. Volume de la boule unité:

1) a) Calculer $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$

   b) En déduire que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} I_{\{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq t\}}(x_1,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$ de deux manières; en déduire que $v(B_n(0,1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$