Probabilités
Agrégation interne, Année 20/21
Variables à densité

1 Exercices sur les variables aléatoires à densité à valeurs réelles

Exercice 1.1. Existe t-il $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité de probabilité ?
Même question avec $f(x) = ce^{-x^2+4x}$.

Exercice 1.2. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. On suppose qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in U$, $f(x) = 0$.
Montrer que $\mathbb{P}(X \in U) = 0$.

Exercice 1.3. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
Donner la loi de X^2, son espérance et sa variance.

Exercice 1.4. Soit X une variable aléatoire admettant une densité donnée par $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. X admet-elle une espérance ? Si oui, calculer la.
2. X admet-elle une variance ? Si oui, calculer la.
3. Déterminer la loi de $|X|$.

Exercice 1.5. Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 2-x & \text{si } x \in [1, 2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter f.
2. Calculer $P(X > 1)$.
3. Soit $0 < b < 1$.
   Calculer $P(1 - b < X \leq 1 + b)$.
4. Montrer que les événements $\{X > 1\}$ et $\{1 - b < X \leq 1 + b\}$ sont indépendants.

2 Exercices avec des couple de variables aléatoires à ensité

Exercice 2.1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y\}$ et dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - e^{-x} - xe^{-y} \text{ si } (x, y) \in D$$

1. Déterminer F_X et F_Y.
2. (X, Y) admet-il une densité sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les lois marginales de (X, Y).
4. Calculer $P(X \leq 1|Y > 2)$.
5. Calculer $P(Y \leq 2X)$.

Exercice 2.2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/0 \leq x \leq y \leq 1\}$ admettant une densité donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{1}_D((x, y))$$

1. Déterminer les densités marginales de X et Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Soit $U = \frac{X}{Y}$ et $V = Y$. Déterminer la fonction de répartition de (U, V).
4. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.3. Soit f la densité de probabilité d'une v.a.r. $Z > 0$; on pose

$$g(x, y) = \frac{1}{x + y} f(x + y) \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}}.$$

1) Montrer que g est une densité d'un couple (X, Y) de v.a.r. > 0.
2) Exprimer $E[X]$, $E[Y]$, $V(X)$, $V(Y)$ et $\text{cov}(X, Y)$ à l'aide de $E[Z]$ et de $E[Z^2]$.

Exercice 2.4 (Rapport de deux exponentielles)**.** Soit (X, Y) un couple de v.a.r. indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres λ et $\mu > 0$. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de la v.a.r. $U = Y/X$.

Exercice 2.5 (Une loi normale dans $\mathbb{R}^2$)**.** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles possédant une densité sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi(1 - \alpha^2)} e^{-\frac{x^2+y^2-2\alpha xy}{2((1-\alpha^2)}}$$

On suppose que $-1 < \alpha < 1$.

1. Donner les lois de X et de Y. Calculer leur espérance et leur variance.
2. Calculer la covariance de (X, Y).
3. Soit $Z_1 = X + Y$ et $Z_2 = X - Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1 et Z_2. Donner leur covariance.
4. Calculer la loi du couple (Z_1, Z_2). Montrer que Z_1 et Z_2 sont indépendantes et donner leurs lois respectives.

Exercice 2.6 (Vont-ils se rencontrer ?)**.**
Paul et Virgine arrivent dans le parc indépendament l'un de l'autre et de manière uniforme entre 12h et 13h. Chacun attend un quart d'heure et s'en va si l'autre n'est pas là.
On pose la question : Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?
En notant X l'heure d'arrivée de Virginie et Y l'heure d'arrivée de Paul, traduire mathématiquement sur X et Y les hypothèses.
Répondre ensuite à la question.

Exercice 2.7 (Quelques calculs avec la loi uniforme)**.** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $U = \inf(X,Y)$ et $V = \sup(X,Y)$.
1. Déterminer $F_{U,V}$ la fonction de répartition du couple (U,V). En déduire la densité $f_{U,V} = 2\mathbb{1}_T$ où T est le domaine triangulaire $T = \{(u,v)|0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1\}$. Est-ce que U et V sont indépendantes ?
2. Quelles sont les densités f_U et f_V des lois de U et V ? En déduire $E[U]$ et $E[V]$ [Réponses : $E[U] = 1/3$ et $E[V] = 2/3$].
3. Calculer $V(U)$, $V(V)$, $\mathrm{cov}(U,V)$ et $\rho(U,V)$.
[Réponses : $V(U) = V(V) = 1/18$; $\mathrm{cov}(U,V) = 1/36$; $\rho(U,V) = 1/2$].

3 Résultats classiques

Exercice 3.1 (Loi sans mémoire)**.** On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s,t > 0$.

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

1. Vérifier qu'une variable aléatoire T vérifiant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire dont la densité est donnée par $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Calculer $P(T > t/2^n)$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$. Conclusion ?
   (b) Soit $\alpha = P(T > 1)$. Démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (démontrer le d'abord pour $t \in \mathbb{N}^*$, puis pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$ et enfin pour $t \in \mathbb{R}_+^*$).
   (c) Conclure.

Exercice 3.2 (Inversion fonction de répartition)**.** Soit F une fonction croissante continue à droite de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$ et telle que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
Montrer que pour tout $0 < t < 1$, $\{x \in \mathbb{R}/F(x) \geq t\}$ est un intervalle du type $[z, +\infty[$.
On définit le pseudo-inverse de F sur $]0,1[$, noté $F^{\leftarrow}$ par $F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}/F(x) \geq t\}$.
Montrer que cette fonction est bien définie et que pour tout $0 < t < 1$, $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \geq t \iff x \geq F^{\leftarrow}(t)$.

Dans le cas où il existe $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ tel que F soit une bijection de $]a, b[$ sur $]0, 1[$, déterminer $F^{\leftarrow}$.
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Déterminer la loi de $F^{\leftarrow}(U)$.
Utiliser ceci pour simuler à partir d'une loi uniforme une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
De même proposer une simulation d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Exercice 3.3 (Une formule pour l'espérance)**.** Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance. On suppose que la loi de X admet une densité f et on note F sa fonction de répartition.
Montrer que si $x > 0$, $x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt$.
En déduire que $x(1 - F(x))$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que $E[X] = \int_0^{+\infty}(1 - F(t))dt$. (Pensez à la formule d'intégration par parties).

Exercice 3.4 (Problème de l'aiguille de Buffon)**.** Une aiguille de longueur l est jetée "au hasard" sur un plan qui est strié par des parallèles (i.e. les rainures du parquet) situées à distance $d > l$ les unes des autres. Soit X la variable aléatoire donnée par la distance du milieu de l'aiguille à la parallèle la plus proche et Θ celle donnée par l'angle orienté entre une strie et l'aiguille.
On traduit l'hypothèse "jeter au hasard" par le fait que le couple (X, Θ) suit la loi uniforme sur $[0, d/2] \times [0, \pi]$. Quelle probabilité a-t-on que l'aiguille coupe une parallèle ?

Exercice 3.5 (Régression linéaire)**.** Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles.
On pose
$$\varrho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad \overline{X} = X - E[X], \quad \overline{Y} = Y - E[Y].$$
1) Montrer que $|\mathrm{cov}(X, Y)| = |E[\overline{X}\ \overline{Y}]| \leqslant \sigma_X \sigma_Y$.
En déduire que $-1 \leqslant \varrho_{X,Y} \leqslant 1$.
2) Montrer que $|\varrho_{X,Y}| = 1$ si et seulement si il existe a non nul et b tels que $P(Y = aX + b) = 1$.
On pourra calculer $E[(\overline{Y} + t\overline{X})^2]$.
3) Préciser la valeur de $\varrho_{X,Y}$ si X et Y sont indépendantes.
4) On cherche la meilleure approximation de Y comme fonction affine de X au sens des moindres carrés, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs de a et b qui minimisent $E[(aX + b - Y)^2]$. Notons $\Phi(a, b) = E[(aX + b - Y)^2]$
Montrer que $\Phi(a, b) = E[(\overline{Y} - a\overline{X})^2] + (E[Y] - (aE[X] + b))^2$.
En déduire que le couple (a_0, b_0) qui minimise Φ vaut
$$a_0 = \varrho_{X,Y}\sigma_Y/\sigma_X, \qquad b_0 = E[Y] - a_0 E[X].$$
On appelle la droite d'équation $y = a_0 x + b_0$ la droite de régression linéaire de Y en X.
5) On suppose que (X, Y) suit la loi uniforme sur un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire qu'il existe n points (x_i, y_i) dans le plan tels que $P(X = x_i, Y = y_i) = 1/n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X dans ce cas.

Exercice 3.6 (Une propriété des lois exponentielles)**.** Soient $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que X_i est de loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$.

1. Montrer que $Y = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
2. Montrer que la probabilité qu'il existe $1 \leq i < j \leq n$ tel que $X_i = X_j$ est de probabilité nulle.

   En déduire que p.s. il existe une variable aléatoire I avec $1 \leq I \leq n$ telle que $Y = X_I$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(I = i \text{ et } Y \leq t) = \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda t}$. En déduire que I et Y sont indépendants et donner la loi de I.

Exercice 3.7 (Loi de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes)**.** Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que f est une densité de X et g une densité de Y.

1. Montrer que le couple (X, Y) admet une densité h donnée par $h(x, y) = f(x)g(y)$.
2. Soit ψ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée. Montrer que
$$E[\psi(X + Y)] = \int_{\mathbb{R}} \psi(z)(f * g)(z)dz$$
   où $(f * g)(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z - y)g(y)dy$. En déduire que $f * g$ est une densité de $X + Y$.
3. Soit $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. Montrer que Γ est une fonction continue sur $]1, +\infty[$.

   Soit pour $a > 1$, f_a la fonction définie par $f_a(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
4. Déterminer si $a, b > 1$, $f_a * f_b$.
5. Déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3.8 (Une convergence en loi)**.** Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X_n ?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).