

Groupes et actions de groupes

2 : Classes importantes de groupes.

Références

COMBES, *Algèbre et géométrie*.

FRANCINOUE-GIANELLA-NICOLAS, *Oraux X-ENS, algèbre 2*.

GOURDON, *Math en tête - Algèbre*

SKANDALIS, *Algèbre générale et algèbre linéaire*.

ULMER, *Théorie des groupes, cours et exercices*.

Étude de groupes finis importants

Exercice 1 (Classique et culture ***)

On note \mathbb{U}_n le sous-groupe de \mathbb{C}^* formé des racines n -ième de l'unité.

Déterminer $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (Connaître au moins les plus classiques **)

Soit $n \geq 2$.

1. (voir [Ulmer] exercice 5.5) Montrer que S_n est engendré par :

a. les transpositions.	b. les transpositions de la forme $(1\ i)$, $i \geq 2$.	c. les transpositions de la forme $(i\ i+1)$, $i \leq n-1$.
	d. les permutations $(1\ 2)$ et $(2\ 3 \dots n)$.	e. les permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2 \dots n)$.
2. ([Gourdon] p.24, [Ulmer] chapitre 5) Montrer que le groupe alterné A_n des permutations dites paires est engendré par :

a. les 3-cycles,	b. les 3-cycles de la forme $(1\ i\ j)$, $i, j \geq 2$.
------------------	---

Exercice 3 (classique *)

Soit $n \geq 2$.

1. Décrire les morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (penser à la signature et au fait qu'un morphisme est caractérisé par l'image d'un système générateur du groupe de départ)
2. Décrire les morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (idem!)

Exercice 4 (Le groupe des quaternions, voir Ulmer exercice 1.16 et 3.4 (culture et manipulation **))

On peut montrer qu'à isomorphisme près, il n'y a que 5 groupes d'ordre 8 :

- les trois groupes abéliens $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$,

- le groupe diédral D_4 ,

- le groupe des quaternions \mathbb{H}_8 , que nous allons étudier dans cet exercice.

On note \mathbb{H}_8 le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par les trois matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1. Dresser la liste des éléments de \mathbb{H}_8 .
2. Montrer que \mathbb{H}_8 n'est ni abélien ni isomorphe au groupe diédral D_4 (on s'intéressera aux éléments d'ordre 4).
3. Déterminer les sous-groupes, les sous-groupes distingués et les quotients du groupe \mathbb{H}_8 .

Exercice 5 *les groupes linéaires sur un corps fini (classique et culture *)*

On note \mathbb{F}_q un corps de cardinal q (puissance d'un nombre premier).

1. Quel est le cardinal d'un espace vectoriel de dimension i sur \mathbb{F}_q ?

2. En déduire que le cardinal du groupe $\text{GL}(\mathbb{F}_q^n)$ vaut $\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$.

3. Déterminer $\text{card}(\text{GL}(\mathbb{F}_2^3))$ et montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un sous-groupe de $\text{GL}(\mathbb{F}_2^3)$ dont le cardinal est la plus grande puissance de 2 divisant le cardinal de $\text{GL}(\mathbb{F}_2^3)$.

4. Déterminer $\text{card}(\text{GL}(\mathbb{F}_3^2))$ et trouver un sous-groupe de $\text{GL}(\mathbb{F}_3^2)$ dont le cardinal est la plus grande puissance de 3 divisant le cardinal de $\text{GL}(\mathbb{F}_3^2)$.

Étude de groupes infinis non géométriques

La structure d'un groupe infini, même abélien, peut être compliquée. Voici quelques exercices classiques sur le groupe additif \mathbb{Q} ([Francinou-Gianella, Oraux X-ENS, Algèbre 1]) et sur les sous-groupes additifs de \mathbb{R} .

Exercice 6 *(manipulation *)*

1. Déterminer tous les morphismes du groupe \mathbb{Q} dans le groupe \mathbb{Z} .

2. Déterminer tous les morphismes du groupe \mathbb{Q} dans le groupe \mathbb{Q}^* .

Exercice 7 *(culture *)*

Montrer que le groupe \mathbb{Q} n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

Exercice 8 *(classique ***)*

Montrer qu'un sous-groupe de \mathbb{R} est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans \mathbb{R} .

Des sous-groupes finis de groupes infinis

Les questions suivantes sont issues de domaines éloignés mais ont pour point commun d'étudier les sous-groupes finis de groupes infinis.

Exercice 9 *Exposant d'un groupe, voir [Gourdon] ex.9 p.26 (développement ***)*

On appelle *exposant* d'un groupe fini G le plus petit entier $e \geq 1$ tel que $x^e = 1$ pour tout $x \in G$ (il existe d'après le théorème de Lagrange).

Soit G un groupe abélien fini d'exposant e .

1. Montrer que si deux éléments a, b de G sont d'ordre premier entre eux, alors $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$ (indication : que peut-on dire de l'ordre d'un élément de $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$?) et $\text{ordre}(ab) = \text{ordre}(a) \cdot \text{ordre}(b)$.

2. Montrer que si deux éléments a, b de G sont d'ordre n et m respectivement, alors G possède un élément d'ordre $\text{ppcm}(n, m)$. Donner un exemple où ab n'est pas d'ordre $\text{ppcm}(n, m)$.

3. En déduire que e est le maximum des ordres des éléments de G et le ppcm des ordres des éléments de G (remarque : certaines références définissent l'exposant d'un groupe par une de ces deux manières, mais ce n'est pas naturel). Indication : trouver un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G .

4. Application : montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

5. Que peut-on en déduire pour le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$? pour \mathbb{C}^* ?

Exercice 10 *Un résultat fondamental ([F-G-N, Oraux X-ENS algèbre 2], ex. 3.17) (classique ***)*

Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Montrer qu'il existe un produit scalaire b_0 tel que G est un sous-groupe du groupe $O(b_0)$ des isométries de l'espace euclidien (\mathbb{R}^n, b_0) .

Indication : prendre un produit scalaire quelconque b et considérer $b_0 = \frac{1}{\text{card } G} \sum_{g \in G} g.b$ où $g.b$ désigne la forme bilinéaire définie par $b.g(x, y) = b(g(x), g(y))$.

Conclusion : ce résultat montre qu'étudier les sous-groupes finis de $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ revient à étudier les sous-groupes finis de $O(n)$, ce qui se fait classiquement pour $n = 2$ (exercice suivant) et $n = 3$ (classique à l'agrégation).

Exercice 11 $SO(2)$, $O(2)$ et leurs sous-groupes finis (manipulation et culture ***)

1. Décrire les éléments de $SO(2)$ et les éléments de $O(2)$.
 2. Montrer que $SO(2)$ est isomorphe au sous-groupe \cup de \mathbb{C}^* formé des racines de l'unité et au groupe quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
 3. Montrer que tout sous-groupe fini de $SO(2)$ est cyclique.
- Soit G un sous-groupe fini de $O(2)$ non inclus dans $SO(2)$.
4. Montrer que le sous-groupe $H = G \cap SO(2)$ de G est d'indice 2. En déduire qu'il est distingué.
 5. Soit s un élément de $G \setminus H$. Faire la liste des éléments de G et montrer que G est un groupe diédral ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Complément 1 : on peut également classer les sous-groupes finis de $SO(3)$ et de $O(3)$ (voir par exemple [Ulmer]). On peut montrer qu'il y a deux classes infinies de tels sous-groupes (des groupes cycliques et des groupes diédraux), et un nombre fini de sous-groupes "exceptionnels", associés aux polyèdres réguliers (leurs groupes de symétrie).

Complément 2 : Le résultat suivant est un développement classique de l'agrégation :

Théorème de Burnside : Si G est sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini, alors G est fini.

Il est développé dans [Francinou-Gianella-Nicolas, Oraux x-ens, algèbre 2] ex. 3.6. Le résultat est faux pour un groupe quelconque, il existe des groupes infini d'exposant fini.

Étude de groupes géométriques

Exercice 12 (culture *)

Donner un groupe infini engendré par deux éléments d'ordre 2.

Indication : penser à un groupe géométrique.

Dans la suite, si X est une partie d'un espace euclidien (affine ou vectoriel), on note $\text{Is}(X)$ l'ensemble des isométries de l'espace laissant X stable. C'est un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace.

Exercice 13 (manipulation **)

Dans le plan affine euclidien \mathbb{R}^2 , on considère les parties suivantes :

$$A = \mathbb{R}(1, 0) \cup \mathbb{R}(0, 1), \quad B = \{(-1, 0), (1, 0)\}, \quad C = \{(\pm 1, 0), \pm(1, 1)\}, \quad D = \{(\pm 1, \pm 2)\}, \quad E = \{(\pm 1, \pm 1)\}.$$

Déterminer les groupes d'isométries $\text{Is}(A)$, $\text{Is}(B)$, $\text{Is}(C)$, $\text{Is}(D)$, $\text{Is}(E)$.

Exercice 14 *Le groupe du tétraèdre (classique et culture ***)*

On considère un tétraèdre régulier T de sommets A, B, C, D dans l'espace affine euclidien de dimension 3, au sens (dans cet exercice) où T est l'enveloppe convexe $\text{conv}(\{A, B, C, D\})$ des quatre sommets.

Attention, le tétraèdre régulier est un objet classique mais il faut savoir en justifier l'existence (comment faites-vous?). Attention également, l'expression "l'espace euclidien de dimension 3" est abusive mais sans conséquence car tous les espaces affines euclidiens de dimension 3 sont isomorphes. On devrait en préciser un, par exemple \mathbb{R}^3 muni de ses structures standards.

On note $X = \{A, B, C, D\}$ et G le groupe $\text{Is}(T)$ des isométries du tétraèdre.

1. Montrer que $\text{Is}(T) = \text{Is}(X)$. En déduire un morphisme ϕ de $\text{Is}(T)$ dans S_4 et montrer que ce morphisme est injectif.
2. Montrer que toutes les transpositions de S_4 sont images par ϕ d'éléments de $\text{Is}(T)$ et en déduire que ϕ est un isomorphisme.
3. Identifier les isométries de $\text{Is}(T)$ correspondant aux éléments de A_4 .

On note Y l'ensemble des bi-médianes de T , c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par les milieux de deux côtés opposés de T .

4. Montrer que $\text{Is}(T)$ agit sur Y et en déduire un morphisme de S_4 dans S_3 . Quel est son noyau ?

Remarque : ce morphisme est exceptionnel, les morphismes de S_n dans S_m , $m < n$, sont en général réduits au morphisme trivial ou à la signature. Il correspond au fait que A_4 possède un sous-groupe distingué non trivial.

5. (conjugaison) Soit T' est un tétraèdre régulier de l'espace affine. On admet qu'il existe une application affine (une similitude) g envoyant T sur T' . Quel est le lien entre $\text{Is}(T)$ et $\text{Is}(T')$?

Complément : On peut également déterminer le groupe des isométries du cube. On peut montrer que le groupe des isométries directes du cube est isomorphe à S_4 , il est d'indice deux dans le groupe complet des isométries du cube. Il est facile de voir le groupe des isométries comme sous-groupe de S_8 (permutations des sommets) ou de S_6 (permutations des faces). Sur quel ensemble géométrique à 4 éléments le groupe des isométries du cube agit-il ?