

# Dénombrement

Préparation à l'agrégation interne

Année 20/21

## 1 Notions

*Vérifier si vous connaissez les notions ci-dessous et le cas échéant, les revoir*

1. Théorie des ensembles : Appartenance, inclusion, égalité, réunion, intersection, lois de Morgan.
2. Définition d'un ensemble fini et du cardinal d'un ensemble fini.
3. Définition d'un ensemble dénombrable.
  - (a)  $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sont dénombrables.
  - (b) Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
4. Principes de dénombrement :
  - (a) Principe de bijection (Exercices 3,6,9, partie 4.1,4.2.1 )
  - (b) Principe d'addition (Tous les exercices)
  - (c) Principe de multiplication
  - (d) Permutation, arrangement
  - (e) Principe des tiroirs (Exercice 10)
  - (f) Principe de division ou principe des bergers.
5. Parties d'un ensemble
  - (a) Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à  $n$  éléments.
  - (b) Cardinal de l'ensemble des parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.
6. Formules
  - (a) Coefficients binomiaux. Formule du binôme. Triangle de Pascal.
  - (b) Coefficients multinomiaux.
  - (c) Formule d'inclusion/exclusion.(Exercice 7)
7. Méthodes
  - (a) Etablissement de formules de récurrence. Exercices 6,7
  - (b) Utilisation de séries génératrices. Exercices 6,7,8.
8. Probabilités sur un espace fini

## 2 Petits exercices

**Exercice 1.** Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Quel est le nombre de couples  $(A, B)$  formés de parties de  $E$  telles que  $A \subset B$ ?

Quel est le nombre de couples  $(A, B)$  formés de parties de  $E$  telles que  $A \cap B = \emptyset$ ?

**Exercice 2. Une inégalité** Si  $A_1, \dots, A_n$  sont des parties de  $E$  on a  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + \dots + |A_n|$ .

**Exercice 3.** Quel est le cardinal de  $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq x_1 < \dots < x_k \leq n\}$  où  $k \leq n$ ?

**Exercice 4.** Montrer que  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .

Que représente ce nombre ?

**Exercice 5.** Montrer que  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

(On dénombrera de deux façons différentes le nombre de parties à  $n$  éléments d'un ensemble comportant  $n$  boules rouges et  $n$  boules noires. On parle de preuve par double dénombrement). Plus généralement, montrer que pour tout  $l \leq m + n$ ,

$$\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$$

On fait la convention que  $\binom{n}{k} = 0$  si  $k < 0$  ou  $k > n$ .

## 3 Proposition d'exercices pour les leçons 438 et 307

*Ref pour certains : oraux X-ENS, algèbre 1 ; exercice d'algèbre pour l'agrégation, Francinou Gianella ; compléments d'algèbre et de géométrie, collection Capes/agreg ; livre pour l'oral d'exercices pour l'agreg interne ; Probabilités, Jean-Yves Ouyard, tome 1 ; Probabilités Préparation à l'agrégation interne, Djalil Chafaï et Pierre-André Zitt ; De l'intégration aux probabilités, Olivier Garet, Aline Kurtzmann ; Cotrell/Genon-Catalot/Duhamel/Meyre Exercices de probabilités ; Warusfel/Attali/Collet/Gautier/Nicolas mathématiques/Probabilités - Cours et exercices.*

**Exercice 6. Nombres de Fibonacci** On dispose d'un damier de taille  $2 \times n$  et de dominos de taille  $1 \times 2$  que l'on peut poser horizontalement ou verticalement.

On note  $F_n$  le nombre de façons de recouvrir le damier avec les dominos.

1. Calculer  $F_1, F_2, F_3$ .

2. Formule explicite 1

(a) Montrer que si un domino est posé horizontalement sur la première ligne, alors il y a un autre domino juste en dessous.

(b) En déduire la formule :

$$F_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n-k}{k}$$

3. Formule de récurrence

(a) Montrer que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

(b) Formule explicite 2

Montrer que  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$ .

### Exercice 7. Nombre de dérangements

On note pour  $n \geq 1$ ,  $D_n = |\{\sigma \in S_n / \forall x, \sigma(x) \neq x\}|$ , c'est à dire le cardinal de l'ensemble des permutations à  $n$  éléments sans point fixe. On note pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $\mathcal{P}_{k,n}$  l'ensemble des permutations à  $n$  éléments ayant  $k$  points fixes et  $P_{k,n}$  son cardinal. On pose  $D_0 = 1$ .

#### 1. Méthode 1

(a) Montrer que  $P_{k,n} = \binom{n}{k} D_{n-k}$ .

(b) Montrer que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$ .

(c) Montrer par récurrence que  $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

2. **Méthode 2** Retrouver la formule précédente en utilisant la formule du crible.

#### 3. Méthode 3

(a) Soit  $f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{D_k}{k!} z^k$ . Montrer que le rayon de convergence est supérieur ou égal à

1. Montrer en utilisant la formule de la question 1(b) que  $f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$ .

(b) Retrouver la formule

### Exercice 8. Nombres de Bell

On note  $B_n$  le nombre de partitions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Montrer que  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ . Montrer que  $B_n \leq n^n$ .

2. Soit  $f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$ . Montrer que le rayon de convergence est strictement positif et montrer que  $f(z) = e^{e^z - 1}$  en calculant  $f'(z)$ .

3. Montrer que  $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$ .

### Exercice 9. Nombres d'arbres

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un graphe est un arbre si pour tous sommets distincts de  $V$   $a$  et  $b$ , il existe un unique chemin les reliant. Si  $x \in V$ , on note  $d(x)$  le nombre d'arêtes issues de  $x$ . On appelle feuille un sommet de l'arbre n'ayant qu'un voisin, i.e. un sommet  $x$  tel que  $d(x) = 1$ .

On suppose que  $V$  et  $E$  sont des ensembles finis.

#### 1. Lemme des poignées de main

Montrer que  $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$ . *Principe de double comptage*

2. Montrer que si on enlève une arête à un arbre on obtient deux arbres.

3. Montrer par récurrence que le nombre d'arêtes d'un arbre à  $n$  sommets est  $n - 1$ .

4. Montrer qu'un arbre a au moins deux feuilles.

5. **Algorithme de Prüfer** On suppose que  $V = \{1, \dots, n\}$ . On définit la suite d'arbres  $T_0, \dots, T_{n-2}$  et la suite d'éléments de  $V$ ,  $a_1, \dots, a_{n-2}$  par récurrence de la façon suivante :
- $T_0 = G$ .
  - Soit  $i \geq 0$ . On suppose  $T_0, \dots, T_i$  et  $a_1, \dots, a_{i-1}$  construits. On note  $b_{i+1}$  la plus petite feuille de  $T_i$  et  $a_{i+1}$  son voisin. On définit alors  $T_{i+1} = T_i \setminus \{b_{i+1}\}$ . C'est donc un arbre.
- Dessiner un arbre de sommets  $\{1, \dots, 7\}$  et trouver le 5-uplet  $(a_1, \dots, a_5)$  associé par l'algorithme précédent.
6. Montrer que l'algorithme précédent fournit une bijection de l'ensemble des arbres de sommets  $\{1, \dots, n\}$  sur  $[[1, n]]^{n-2}$ .
- Pour ceci écrire un algorithme de décodage.

**Exercice 10. Approximation d'un irrationnel par des rationnels**

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il s'agit de montrer qu'il existe  $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2}$ .  
 On définit  $y_k = kx - [kx]$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

1. Montrer qu'il existe  $0 \leq i < j \leq n$  tel que  $|y_i - y_j| \leq \frac{1}{n}$ .
2. En déduire le résultat.
3. En utilisant la propriété pour  $x = 2\pi$ , montrer que  $(\cos n)_{n \geq 0}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

**Exercice 11. Nombre de colliers de perles**

Déterminer le nombre de colliers à 9 perles comportant 2 perles jaunes et 7 perles rouges.  
 Exercice sur les groupes et groupe opérant sur un ensemble.

## 4 Dénombrément, probabilités

### 4.1 Problème d'occupation

On dispose de  $n$  boîtes numérotées de 1 à  $n$  et de  $k$  balles indiscernables. On range les balles dans les boîtes et on se demande quelle est le nombre de façons possibles de le faire.

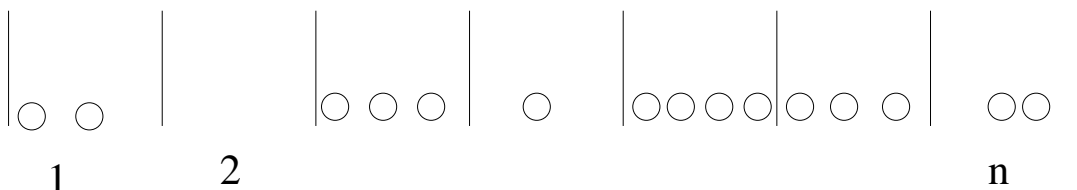
Notons pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i$  le nombre de balles dans la boîte  $i$ . On cherche donc le cardinal de  $\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n / a_1 + \dots + a_n = k\}$ .

**Théorème :**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$|\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n / a_1 + \dots + a_n = k\}| = \binom{n+k-1}{k}$$

**Preuve :** Représentons un élément de l'ensemble précédent de la façon suivante :



On a sur cet exemple  $n = 7$  et  $k = 15$ .

Ainsi une répartition des  $k$  balles dans les  $n$  boites correspond à un unique mot de  $k$  "ronds" et  $n - 1$  barres. (On enlève la cloison la plus à droite et la cloison la plus à gauche.)

Réciproquement un tel mot correspond à une répartition des  $k$  balles dans les  $n$  boites.

Par exemple le mot  $OOOO|O||OOO|OO|OO|OOO$  correspond à la solution  $(4,1,0,3,2,2,3)$ .

Un tel mot comporte  $n + k - 1$  lettres. Une fois qu'on a choisi l'emplacement des  $k$  ronds, le mot est déterminé. Il y a donc  $\binom{n+k-1}{k}$  solutions.

#### 4.1.1 Une autre démonstration pour le problème d'occupation

Soient  $n$  et  $k$  des entiers naturels. On note  $G_n^k$  le nombre de  $n$ -uplets  $(x_1, \dots, x_n)$  d'entiers naturels tels que  $x_1 + \dots + x_n = k$ .

a) Déterminer  $G_n^0$ ,  $G_n^1$  et  $G_n^2$  en fonction de  $n$  et  $G_2^k$  en fonction de  $k$ .

b) Démontrer que  $G_{n+1}^{k+1} = G_{n+1}^k + G_n^{k+1}$ . On pourra classer les  $(n + 1)$ -uplets tels que  $x_1 + \dots + x_{n+1} = k + 1$  suivant que  $x_1 = 0$  ou non.

c) En déduire que

$$G_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

#### 4.1.2 Encore une autre démonstration pour le problème d'occupation

Notons  $\mathcal{G}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 + \dots + x_n = k\}$ .

Notons  $\mathcal{H}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = k\}$ .

Notons  $\mathcal{U}_n^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 < x_2 < \dots < x_n = k + n - 1\}$ .

Montrer que les applications suivantes sont bijectives.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{H}_n^k \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n) \\ \\ \mathcal{H}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{U}_n^k \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_2 + 1, \dots, x_n + n - 1) \end{array}$$

En déduire le résultat.

#### 4.1.3 Balles et paniers

On a  $r$  balles et  $n$  paniers numérotés de 1 à  $n$ .

On répondra aux questions dans les deux cas suivants :

(a) Les  $r$  balles sont discernables (par exemple parce qu'elles sont de couleurs différentes).

(b) Les  $r$  balles sont indiscernables.

Question 1 : Quel est le nombre de répartitions possibles (un panier peut contenir plusieurs balles) ?

On suppose qu'on a équiprobabilité.

Question 2 : Quelle est la probabilité  $p_k$  qu'un panier donné contienne exactement  $k$  balles.

Étudier la monotonie de la suite  $(p_k)_{0 \leq k \leq r}$ .

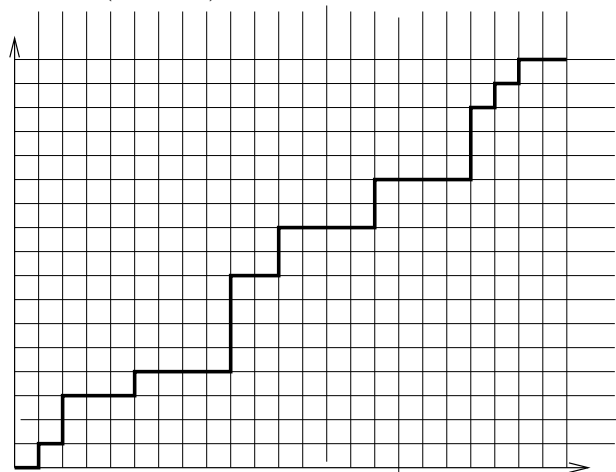
Question 3 : On suppose que  $n$  et  $r$  tendent vers l'infini et que  $r/n$  tend vers  $\lambda$ . Montrer que chaque terme  $p_k$  admet une limite et calculer celle-ci.

## 4.2 Chemins et nombre de Catalan, problème du scrutin

### 4.2.1 Chemins et nombre de Catalan

On considère  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  et le réseau passant par les points de coordonnées entières .

On imagine une personne se déplaçant sur ce réseau seulement dans les directions Nord ou Est, c'est à dire que si la personne est au point de coordonnées  $(x, y)$ , elle va soit en  $(x + 1, y)$  soit en  $(x, y + 1)$ .



Voici un exemple de chemin de  $(0, 0)$  à  $(23, 17)$ .

**Quel est le nombre de chemins pour aller de  $(0, 0)$  à  $(p, q)$  ?**

On peut voir aussi cette représentation comme la modélisation de l'expérience suivante :

On jette une pièce de monnaie  $p + q$  fois. A chaque lancer, on fait un déplacement horizontal si on obtient un pile et un déplacement vertical sinon.

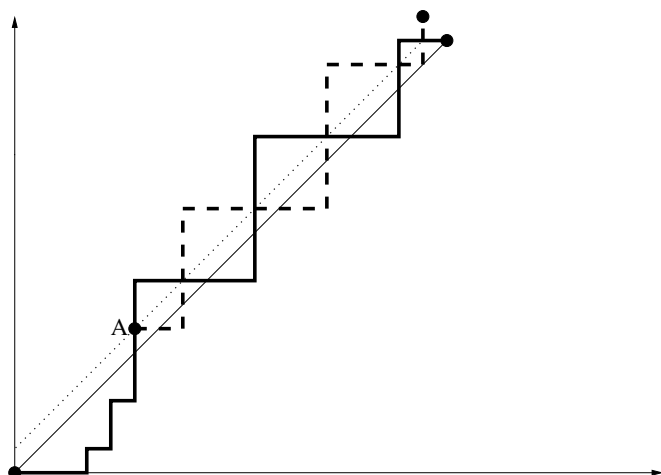
**Quel est le nombre de chemins pour aller de  $(a, b)$  à  $(p, q)$  où  $0 \leq a \leq p$  et  $0 \leq b \leq q$  ?**

**Quel est le nombre de chemins de  $(0, 0)$  à  $(n, n)$  qui reste en dessous de la diagonale ?**

Supposons dans l'interprétation précédente que je gagne  $1\text{€}$  chaque fois que la pièce tombe sur pile et perde  $1\text{€}$  chaque fois qu'elle tombe sur face. La réponse à la question me donne le nombre de possibilités telles que partant avec  $0\text{€}$ , ma fortune reste toujours positive.

Pour calculer ce nombre, on va d'abord utiliser le principe de soustraction. Ce nombre est égal au nombre de chemins de  $(0, 0)$  à  $(n, n)$  moins le nombre de chemins de  $(0, 0)$  à  $(n, n)$  qui traversent la diagonale c'est à dire qui touche la droite d'équation  $y = x + 1$ .

Le premier est connu, il faut donc calculer le second. Représentons un tel chemin :



On considère le premier point où on a touché la droite d'équation  $y = x + 1$ . Soit  $A$ .  
 Ensuite on prend le symétrique du chemin qui va de  $A$  à  $(n, n)$  par rapport à la droite d'équation  $y = x + 1$ . On obtient le chemin en pointillé. C'est donc un chemin qui va de  $(0, 0)$  à  $(n-1, n+1)$ .  
 Le reste de la trajectoire de  $(0, 0)$  à  $A$  est inchangé.  
 Grâce à cette symétrie, on a donc associé à notre chemin de  $(0, 0)$  à  $(n, n)$  qui touche la droite d'équation  $y = x + 1$ , un chemin de  $(0, 0)$  à  $(n-1, n+1)$ .  
 En déduire que le nombre cherché est :

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Ce nombre est appelé nombre de Catalan. Cette astuce de comptage fut trouvée par Désiré André en 1887 et est appelée principe de symétrie.

#### 4.2.2 Problème du scrutin

Lors d'un vote opposant deux candidats A et B, A obtient  $a$  voix et B obtient  $b$  voix. On suppose que  $a < b$ . Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement, B ait toujours été strictement en tête ?

On pourra représenter le dépouillement par un chemin du plan constitué de segments horizontaux ou verticaux de longueur 1 joignant l'origine au point de coordonnées  $(a, b)$  et compter le nombre de chemins situés au dessus de la diagonale.