

# Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2020-2021.

Mercredi 4 Novembre 2020.

Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne.

Laurent BONAVERO

## TABLE DES MATIÈRES

Leçons concernées	1
Matrices symétriques réelles	1
Projection orthogonale	3
Quadriques et réduction des formes quadratiques	6
Un exercice un peu plus délicat	6
Un problème de préparation à l'écrit	7

---

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 5.9, 6 et 10.8 du programme officiel.

## LEÇONS CONCERNÉES

Le contenu de cette séance concerne les leçons suivantes.

**117.** Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.

**120.** Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.

**205.** Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espaces préhilbertien. Application à l'approximation des fonctions.

**319.** Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.

**321.** Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.

**355.** Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.

---

## MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

Les exercices suivants portent sur les matrices symétriques réelles, avec un accent particulier sur la positivité.

### Exercice 1. [Faire ses gammes]

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2-a \end{pmatrix}.$$

Déterminer, suivant la valeur de  $a$  les sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à  $M(a)$ .

**Exercice 2. [Ecrit ENS Lyon, second concours]**

Soit  $S$  une matrice symétrique réelle de taille  $n$ . On dit que  $S$  est définie positive si et seulement si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tX S X > 0.$$

- (1) Soit  $S$  une matrice symétrique réelle. Montrer que  $S$  est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de  $S$  sont strictement positives.
- (2) Soit  $S$  une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice  $T$  symétrique définie positive telle que  $T^2 = S$ .
- (3) Soient  $S$  une matrice symétrique définie positive,  $T$  une matrice symétrique définie positive telle que  $T^2 = S$  et  $H$  une autre matrice symétrique définie positive.
  - (a) Montrer que  $SH$  est semblable à  $THT$ .
  - (b) En déduire que  $SH$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et que ses valeurs propres sont  $> 0$ .
  - (c) Montrer

$$\sqrt[n]{\det(S)} \leq \frac{\text{Tr}(SH)}{n \sqrt[n]{\det(H)}}.$$

- (4) Montrer que

$$\sqrt[n]{\det(S)} = \inf_H \frac{\text{Tr}(SH)}{n \sqrt[n]{\det(H)}}$$

où la borne inférieure porte sur toutes les matrices  $H$  symétriques définies positives.

- (5) En déduire que  $S \mapsto \sqrt[n]{\det(S)}$  est concave sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille  $n$ .

**Exercice 3. [Classique de chez classique]**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques réelles à valeurs propres positives ou nulles.

- (1) On suppose  $A$  inversible.
  - (a) Montrer qu'il existe une matrice  $C$  symétrique réelle à valeurs propres  $> 0$  telle que  $C^2 = A$  (on ne demande pas de montrer l'unicité de  $C$ ).
  - (b) Montrer que la matrice  $M = C^{-1}BC^{-1}$  est symétrique à valeurs propres positives (indication : calculer  ${}^tXMX$ ).
  - (c) Montrer que  $\det(A + B) = (\det C)^2 \det(I_n + M)$ , en déduire que
 
$$\det(A + B) \geq \det A + \det B.$$

- (2) Montrer que l'inégalité précédente est encore vraie si  $A$  n'est plus supposée inversible.

**Exercice 4. [Oral X/ENS 2017, Ecrit X/ENS 2015 PC]**

Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , on note  $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$  les valeurs propres de  $A$ .

- (1) Soit  $k \leq n$  et

$$D_{k,n} = \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n t_i = k\}.$$

Soit  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$  des réels. Montrer que

$$\sup_{(t_1, \dots, t_n) \in D_{k,n}} \sum_{i=1}^n t_i s_i = \sum_{i=1}^k s_i.$$

(2) En déduire que pour toute famille orthonormée  $(X_1, \dots, X_k)$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\sum_{i=1}^k {}^t X_i A X_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(A).$$

(3) En déduire que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques réelles, alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^k \lambda_i(A+B) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(B) \text{ et } \sum_{i=k}^n \lambda_i(A+B) \geq \sum_{i=k}^n \lambda_i(A) + \sum_{i=k}^n \lambda_i(B).$$

**Exercice 5. [Conv( $O_n(\mathbb{R})$ )]**

On note  $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$  l'enveloppe convexe du groupe  $O_n(\mathbb{R})$ .

(1) Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique réelle.

Montrer que  $S \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$  si et seulement si le spectre de  $S$  est contenu dans  $[-1, 1]$ .

(2) Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $O$  orthogonale et une matrice  $S$  symétrique positive telle que  $M = OS$ .

(3) Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $M \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$  si et seulement si le spectre de  ${}^t M M$  est inclus dans  $[0, 1]$ .

(4) En déduire enfin que

$$\text{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \|Mx\| \leq \|x\|\}$$

où  $\| \cdot \|$  désigne la norme euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^n$ .

PROJECTION ORTHOGONALE

**Exercice 6. [Faire ses gammes]**

Dans cet exercice,  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne canonique. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

et  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire canoniquement associée.

On pose  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(1) Déterminer la distance  $\delta$  de  $Y$  à  $\text{Im}(f)$ .

(2) Déterminer tous les  $X \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\|AX - Y\|$  soit minimale.

(3) Parmi tous les  $X$  tels que  $\|AX - Y\|$  soit minimale, déterminer celui dont la norme est minimale.

**Exercice 7. [Probabilité et géométrie. ENAC 2019]**

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. On sait que cette urne contient au moins deux boules de chaque couleur.

On note  $n$ ,  $b$  et  $r$  le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges.

On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note leur couleur.

On note  $G$  l'événement : "obtenir deux boules de la même couleur".

On note  $g(n, b, r) = \mathbb{P}(G)$ .

- (1) Déterminer  $g(n, b, r)$ .
- (2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine 0, soient  $N$ ,  $B$  et  $R$  les points de coordonnées respectives  $(15, 0, 0)$ ,  $(0, 15, 0)$  et  $(0, 0, 15)$ .
- (a) Déterminer une équation cartésienne du plan affine  $(NBR)$ .
- (b) Soit  $M$  le point de coordonnées  $(n, b, r)$ .  
Montrer que le point  $M$  appartient au plan  $(NBR)$  et exprimer  $g(n, b, r)$  à l'aide de  $\|OM\|^2$ .
- (c) En déduire que la probabilité  $g(n, b, r)$  est minimale pour un unique triplet  $(n_0, b_0, r_0)$  que l'on explicitera ainsi que  $g(n_0, b_0, r_0)$ .
- (3) On suppose que  $(n, b, r) = (n_0, b_0, r_0)$ .  
Un joueur mise  $x$  euros ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) puis il tire simultanément deux boules dans l'urne. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit  $k$  fois le montant de sa mise où  $k$  est un réel  $> 1$ . Sinon, il ne reçoit rien. Dans les deux cas, il perd sa mise de départ.  
On note  $X$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.  
Déterminer  $\mathbb{E}(X)$  puis déterminer  $k$  de sorte  $\mathbb{E}(X) = 0$ .

### Exercice 8. [Matrices de Gram]

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs. On note  $G_n$  la matrice de taille  $n$  dont le terme général est égal à  $\langle x_i, x_j \rangle$ .

- (1) Soient  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $G_n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels. Démontrer que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0 \Leftrightarrow \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\|^2 = 0.$$

- (2) En déduire que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si la matrice  $G_n$  est inversible.
- (3) En déduire que la matrice  $H_n \in M_n(\mathbb{R})$ , dite matrice de Hilbert, dont le terme général est  $\frac{1}{i+j-1}$  est inversible. *Indication : considérer le produit scalaire "usuel" sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .*
- (4) On suppose que la famille  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  est libre et on note  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ .  
Montrer que

$$(d(x_n, F))^2 = \frac{\det G_n}{\det G_{n-1}}.$$

### Exercice 9. [Oral X/ENS]

Pour  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- (1) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer  $\langle 1, X^k \rangle$  pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .
- (2) Soit

$$D_n = \inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^n x_k t^k \right)^2 e^{-t} dt, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Montrer que  $D_n$  est un minimum, atteint en un unique  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$ .

(3) Soit

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{+\infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^n x_k t^k \right)^2 e^{-t} dt.$$

(a) Exprimer les dérivées partielles de  $\varphi$  sous la forme d'une intégrale.

(b) En déduire que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$1 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{(i+k)!}{k!} = 0.$$

(c) Déterminer le polynôme  $P_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_i (X+1)(X+2)\cdots(X+i)$ .

(d) Montrer que  $D_n = P_n(0)$  puis déterminer  $D_n$ .

### Exercice 10. [Polynômes orthogonaux]

Soient  $a < b$  deux réels et  $\omega \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^{+*})$ . On considère l'espace préhilbertien complexe  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \omega(t) dt.$$

(1) Montrer qu'il existe une base  $(P_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{C}[X]$ , qui est une famille orthonormale de  $E$  et qui vérifie  $\deg(P_n) = n$  pour tout  $n$ . Montrer que cette famille  $(P_n)$  est unique si l'on suppose de plus que chaque  $P_n$  a un coefficient dominant  $> 0$ , ce que l'on suppose dorénavant.

(2) Montrer que  $P_n$  possède  $n$  racines distinctes dans  $]a, b[$  (*indication : considérer le polynôme  $Q = (x - x_1) \cdots (x - x_k)$  où les  $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$  sont les réels appartenant à  $]a, b[$  où  $P_n$  s'annule en changeant de signe*).

(3) (a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , il existe trois constantes réelles  $a_n, b_n$  et  $c_n$  telles que  $P_n = (a_n X + b_n) P_{n-1} + c_n P_{n-2}$ . Montrer de plus que  $a_n > 0$ , puis que  $c_n = -\frac{a_n \|P_{n-1}\|^2}{a_{n-1} \|P_{n-2}\|^2} < 0$ .

(b) En déduire qu'entre deux racines de  $P_{n+1}$ , il y a exactement une racine de  $P_n$ .

(4) Soient  $f \in E$  et  $a_n(f) = \langle f, P_n \rangle$ .

(a) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$  converge.

(b) Soit  $d_n = d(f, \mathbb{C}_n[X])$ . Montrer que la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  converge. On note  $d$  sa limite.

(c) Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , on a

$$0 \leq d \leq \|P - f\| \leq \sup_{t \in [a, b]} |P(t) - f(t)| \sqrt{\int_a^b \omega}.$$

(d) En déduire que  $d = 0$  puis la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$ .

QUADRIQUES ET RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES

Les deux exercices suivants font appel à votre vision géométrique avertie des quadriques de l'espace euclidien de dimension 3.

**Exercice 11. [Géométrie à l'ancienne]**

On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure affine euclidienne canonique. Soient  $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$  et  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ . Reconnaitre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{C}$ . Montrer que leur intersection est constituée de deux droites ; déterminer l'angle entre ces droites.

**Exercice 12. [Formes quadratiques]**

Nature de  $\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz + xz + a(x^2 + y^2 + z^2) = b\}$  suivant  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ? Pour quelles valeurs de  $(a, b)$  l'ensemble  $\mathcal{K}$  est-il compact ?

**Exercice 13. [Polynômes et formes quadratiques]**

Soit  $P(x) = x^n - b_1x^{n-1} + \dots + (-1)^nb_n \in \mathbb{R}_n[X]$ . Soient  $a_j$  les racines complexes de  $P$  et  $V = (a_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = V^tV$ .

- (1) Montrer que  $B$  est symétrique réelle.
- (2) Montrer que  $B$  est positive si et seulement si toutes les racines de  $P$  sont réelles.
- (3) Déterminer la signature de  $B$  en fonction du nombre de racines réelles de  $P$ .

UN EXERCICE UN PEU PLUS DÉLICAT

**Exercice 14. [Topologie faible]**

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

On dit que  $(u_n) \in H^{\mathbb{N}}$  converge faiblement si il existe  $u \in H$  tel que pour tout  $v \in H$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, v \rangle = \langle u, v \rangle$ .

- (1) Démontrer l'unicité de la limite faible  $u$  si elle existe.
- (2) (a) Montrer que la convergence usuelle implique la convergence faible.  
 (b) Montrer que la convergence usuelle et la convergence faible sont équivalentes en dimension finie.
- (c) Soit  $H = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel :  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ .  
 Montrer que la suite  $(x \mapsto \cos(nx))_{n \geq 0}$  converge faiblement vers 0 mais ne converge pas fortement vers 0.
- (d) Soit  $H = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel :  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ .  
 Montrer que la suite  $(x \mapsto \cos(nx))_{n \geq 0}$  converge faiblement vers 0 mais ne converge pas fortement vers 0.
- (3) Soit  $H = \{(x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k \geq 0} x_k^2 < +\infty\}$  muni du produit scalaire usuel :  $\langle x, y \rangle = \sum_{k \geq 0} x_k y_k$ .  
 (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $e_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 0} \in H$ . Montrer que la suite  $(e_n)_{n \geq 0}$  converge faiblement vers 0 mais ne converge pas fortement vers 0.  
 (b) Soit  $(u_n) \in H^{\mathbb{N}}$  une suite bornée. Montrer que  $(u_n)$  possède une suite extraite faiblement convergente.

## UN PROBLÈME DE PRÉPARATION À L'ÉCRIT

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa structure euclidienne usuelle et

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

L'objectif du problème ci-dessous est de démontrer le théorème de Hausdorff suivant.

**Théorème (Hausdorff, 1914).**

Il existe une partition de  $S$  en 4 parties  $A, B, C$  et  $D$  et deux rotations  $u, v \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$  telles que

- $D$  est dénombrable,
- $C = v(B)$ ,  $B = v(A)$  et  $A = u(B \cup C)$ .

Ce théorème affirme qu'à un ensemble dénombrable près,  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $S$ , que  $A, B$  et  $C$  sont deux à deux isométriques et que  $A$  et  $B \cup C$  sont isométriques. La partie  $A$  représente donc à la fois "le tiers" et "la moitié" de la sphère  $S$ .

Quelques années plus tard, Banach et Tarski ont utilisé le théorème de Hausdorff afin d'obtenir le résultat suivant, connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski, et à comparer avec l'exercice 8 ci-dessus.

**Théorème (Banach, Tarski, 1923).**

Soient  $B_1$  la boule unité de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B_2$  la boule de centre 0 et de rayon 2 dans  $\mathbb{R}^3$ .

Alors il existe une partition de  $B_1$ ,  $B_1 = E_1 \sqcup \dots \sqcup E_k$  et des isométries affines (composées de rotations et de translations)  $u_1, \dots, u_k$  telles que  $B_2 = u_1(E_1) \sqcup \dots \sqcup u_k(E_k)$ .

De façon plus étonnante peut-être, ce théorème affirme que l'on peut découper une orange et ré-arranger les morceaux afin de construire la lune...

**Exercice 15. [Le théorème de Hausdorff]**

Soit

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Vérifier rapidement que  $u$  et  $v$  sont deux rotations de  $\mathbb{R}^3$ , en déterminer "l'axe orienté" et "l'angle orienté".

Soit

$$G = \{u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} \dots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2} \mid k \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}, n_1, \dots, n_k \in \{1, 2\}\} \cup \{I_3, u\}.$$

- (2) (a) Montrer que  $G$  est un sous-groupe dénombrable de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ .  
 (b) Soit  $r$  un élément de  $G$  de la forme  $r = v^{n_1} u v^{n_2} u \dots u v^{n_k} u$  avec  $k \geq 1$  et  $n_j \in \{1, 2\}$  pour tout  $j$ . Montrer que

$$r = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \sqrt{3} \\ q_1 & p_4 & q_2 \sqrt{3} \\ q_3 \sqrt{3} & p_5 \sqrt{3} & q_4 \end{pmatrix}$$

où les  $p_i$  sont des entiers pairs et les  $q_i$  sont des entiers impairs.

En déduire qu'un tel élément est différent de  $u$  et de  $I_3$ .

- (c) En déduire que pour tout  $r = u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} \dots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2}$  alors  $r \neq I_3$  et  $r \neq u$  et que l'écriture  $r = u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} \dots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2}$  est unique.

On définit une partition  $(I, J, K)$  de  $G$  de la façon suivante :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(v^2 u)^n \in I$ ,
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u(v^2 u)^n \in J$ ,
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $vu(v^2 u)^n \in K$ ,
- les autres éléments de  $G$  qui ne sont pas d'une des trois formes précédentes appartiennent à  $I, J, K$  respectivement suivant que leur décomposition commence à gauche par  $u, v, v^2$  respectivement.

- (3) Montrer que  $J = vI$ ,  $K = vJ$  et  $I = u(J \cup K)$ .

Soit

$$D = \{x \in S \mid \exists r \in G \setminus \{I_3\}, r(x) = x\}.$$

- (4) Montrer que  $D$  est une partie dénombrable de  $S$ , stable par  $G$ .

On définit une relation d'équivalence sur  $S \setminus D$  de la façon suivante

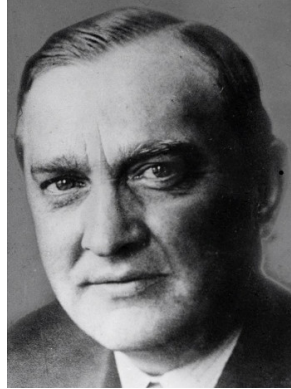
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists r \in G, r(x) = y.$$

- (5) Montrer que  $\sim$  est bien une relation d'équivalence sur  $S \setminus D$ .

Soit  $T$  une partie de  $S$  construite en choisissant un élément de  $S \setminus D$  dans chaque classe d'équivalence.

- (6) Montrer que  $A = I(T)$ ,  $B = J(T)$  et  $C = K(T)$  vérifient la conclusion du théorème de Hausdorff :  $S \setminus D = A \sqcup B \sqcup C$ ,  $C = v(B)$ ,  $B = v(A)$  et  $A = u(B \cup C)$ .

Quelques extraits de Wikipédia.



Felix Hausdorff (1868-1942)   Stefan Banach (1892-1945)   Alfred Tarski (1901-1983)

Felix Hausdorff est un mathématicien allemand. Considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne, il contribua aussi significativement à la théorie des ensembles, à la théorie de la mesure et à l'analyse fonctionnelle.

Stefan Banach est un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs.

Alfred Tarski est un logicien et un philosophe polonais.