Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2020-2021.
Mercredi 30 Septembre 2020.
Révisions d'algèbre linéaire.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Leçons concernées

Le contenu de cette séance concerne les leçons suivantes.
107. Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
109. Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
110. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
112. Changements de base en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
113. Déterminants. Applications.
114. Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
144. Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaires. Applications.
150. Diverses factorisations de matrices. Applications.
155. Systèmes d'équations linéaires. Applications.
310. Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311. Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
312. Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
313. Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
314. Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
353. Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 du programme officiel. Voici un problème qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions : il est posé de façon très progressive et illustre une bonne partie des notions fondamentales utilisées en algèbre linéaire (matrice d'une application linéaire, déterminants, isomorphisme, image d'une base par une application linéaire, coordonnées d'un vecteur dans une base, base duale, interpolation polynomiale).

Déterminants de Vandermonde et polynômes interpolateurs de Lagrange.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

La dimension 4

On note $\beta = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soient a, b, c et d quatre nombres réels et $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \varphi(P) = \big(P(a), P(b), P(c), P(d)\big).$$

(1) Montrer rapidement que φ est linéaire.

(2) Déterminer la matrice $A = [\varphi]_{\beta,e}$ de φ dans les bases β et e.

(3) Calculer le déterminant de A sous une forme factorisée.

(4) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a, b, c et d pour que φ soit un isomorphisme.

Dans toute la suite, on suppose cette condition remplie.

(5) Soit
$$L_1 = \frac{(X-b)(X-c)(X-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$
Déterminer $\varphi(L_1)$.

(6) Construire L_2, L_3 et L_4 dans $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $\varphi(L_i) = e_i$ pour $i \in [\![2, 4]\!]$.

(7) Montrer sans aucun calcul que la famille $\mathcal{B} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la base duale de $\mathcal{B}$.

(8) (a) Quelle est la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et e ?

(b) En déduire sans aucun calcul supplémentaire que la matrice de changement de bases de β à $\mathcal{B}$ est égale à A^{-1}. *Indication :* exploiter $\varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_3[X]}$.

(9) (a) Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'il existe un unique $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que
$$f(a) = P_f(a),\ f(b) = P_f(b),\ f(c) = P_f(c) \text{ et } f(d) = P_f(d)$$
et l'exprimer en fonction des L_i et de $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$.

La dimension quelconque

Soient n un entier ≥ 1, $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $\varphi\ : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par
$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(P) = \big(P(a_1), \ldots, P(a_n)\big).$$

(1) Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ et $(e_1, \ldots, e_n)$.

On note
$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \det\big((a_i^{j-1})\big).$$

(2) Ecrivons
$$\prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i) = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k X^k.$$
En effectuant l'opération élémentaire
$$C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k C_{k+1}$$
trouver une relation entre $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ et $V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

(3) En déduire que
$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(4) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un isomorphisme.

On suppose dorénavant que les a_i sont distincts et on note pour $i \in [\![1, n]\!]$:
$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

(5) Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_n)$.
Déterminer la base duale de $(L_1, \ldots, L_n)$.

(6) Soient $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i. Exprimer ce polynôme à en fonction des b_i et des L_i.

Exercices d'application du cours

Les deux premiers exercices permettent de retravailler les notions de noyau et image d'une application linéaire, de sommes (directes) de sous-espaces vectoriels et utilisent le théorème du rang.

Exercice 1. [Autour du théorème du rang]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif et $g \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.

(2) En déduire que $\dim(E) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

(3) Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.

(4) En déduire finalement que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Cet exercice très progressif utilise le théorème du rang, vous fait construire une base géométriquement adaptée à un endomorphisme nilpotent et utilise le dictionnaire application linéaire / matrice pour déterminer le commutant d'un endomorphisme.

Exercice 3. [d'après EDHEC 2015]
Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que

$$u \circ u = 0.$$

(1) Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

(2) En déduire que $\mathrm{rg}(u) \leq 2$.

(3) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Soient $e_1 \in E \setminus \mathrm{Ker}(u)$ et $e_2 = u(e_1)$.

 (a) Montrer que $e_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ et qu'il existe e_3 et e_4 de sorte que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

 (b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base.

(4) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 2$.

 (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

 (b) Soient (e_1, e_2) une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
 Montrer qu'il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$ puis montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.
 Déterminer la matrice U de u dans cette base.

 (c) Soit
$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$
 le commutant de u.
 En caractérisant la matrice V d'un élément v de $\mathcal{C}(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Cet exercice très élémentaire a pour seul but de vérifier que vous savez ce qu'est un projecteur ou une symétrie et que vous savez déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 4. [Matrices et géométrie]
On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$$

et $D = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(1) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

(2) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Les deux exercices suivants sont fondamentaux et démontrent des résultats généraux sur les noyaux et images des itérés successifs d'un endomorphisme en dimension finie (le théorème du rang joue à nouveau un rôle important). Le cas des endomorphismes nilpotents d'indice de nilpotence maximal est étudié en détail.

Exercice 5. [Noyaux et images emboités]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si k est un entier naturel, on pose $K_k = \mathrm{Ker}\,(f^k)$ (comme d'habitude, $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$) et $F_k = \mathrm{Im}\,(f^k)$.

(1) Montrer que $K_k \subset K_{k+1}$ pour tout k.
(2) En déduire qu'il existe un entier $l \leq n$ tel que $K_l = K_{l+1}$.
(3) Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid K_k = K_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_0$, alors $K_k = K_{k+1}$.
(4) Montrer que $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout k.
(5) En déduire qu'il existe un entier $m \leq n$ tel que $F_m = F_{m+1}$.
(6) Soit $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_k = F_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_1$, alors $F_k = F_{k+1}$.
(7) A l'aide du théorème du rang, montrer que $k_0 = k_1$.
(8) *Application numérique.* Traiter le cas de $f\ : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $f(x,y,z,t) = (y+z, z, 0, 2t)$.

Exercice 6. [Endomorphismes nilpotents]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est **nilpotent**, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $f^m = 0$. On note $N = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$. L'entier N est appelé **indice de nilpotence de** f.

Question préliminaire. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que $N \leq n$.
On suppose **dorénavant** que $N = n$.

(1) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.
(2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
(3) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.
(4) Soit $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ ($C(f)$ est le **commutant** de f).
   (a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant f^k pour tout k. En déduire que $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$.
   (b) Soit $g \in C(f)$. On écrit $g(x_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0)$ dans E et on pose $h = \lambda_0 \,\mathrm{Id}_E + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(f^k(x_0)) = h(f^k(x_0))$.
   En déduire que $g = h$.
   (c) Montrer que $C(f) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de $C(f)$?

Cet exercice élémentaire vous permet d'illustrer de façon pertinente le dictionnaire application linéaire / matrices et démontre un cas très particulier d'un résultat classique : toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\varphi\ : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM - M\,{}^tA.$$

(1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $M_2(\mathbb{R})$.
(2) En déduire le rang de φ, une base de l'image et du noyau de φ.
(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables.

Cet exercice (plus délicat que le précédent) vous permettra de revoir le calcul par blocs et de réviser une caractérisation fondamentale du rang d'une matrice : le rang d'une matrice M est égal à la taille de la plus grande matrice inversible extraite de M. Le caractère polynomial du déterminant joue aussi un rôle fondamental dans cet exercice.

Exercice 8. [Un classique]
Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ \mathrm{rg}(M) \leq r.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\dim(\mathcal{V}) \leq nr$.

(1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\mathcal{V}$ contient la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

On suppose donc dorénavant que $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

(2) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ avec A carrée de taille r. Soit C_i une ligne de C, B_j une colonne de B et d_{ij} le coefficient de D correspondant.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} A + tI_t & B_j \\ C_i & d_{ij} \end{pmatrix} = 0.$$

(b) En déduire que $D = 0$ et que $CB = 0$.

(3) Montrer que l'application

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \mapsto \begin{pmatrix} A & {}^tC + B \end{pmatrix} \in M_{n,r}(\mathbb{R})$$

est injective.

(4) Conclure.

Un problème de préparation à l'écrit

Dans ce problème, on étudie les puissances d'un endomorphisme d'un espace de polynômes. Une jolie application probabiliste est donnée dans la Partie II.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Partie I. Etude d'un endomorphisme de polynômes.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leq n$.
On note pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1 - X)P' + XP.$$

(1) (a) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^k)$.

(b) Montrer que $\varphi\ : E \to \mathbb{R}[X]$ est linéaire.

(c) En déduire que : $\forall P \in E$, $\varphi(P) \in E$ puis que $\varphi\ : E \to E$ est un endomorphisme de E.

Dans toute la suite de cette partie, on étudie l'endomorphisme $\varphi\ : E \to E$.

(2) *Etude du noyau de φ.*

(a) Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ un polynôme de degré égal à d avec $d < n$.
Montrer que $\varphi(P)$ est de degré égal à $d+1$.

(b) En déduire que si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{0\}$, alors P est de degré égal à n.

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{0\}$.
Montrer que $P = \dfrac{1}{n}(X-1)P'$.
En déduire que 1 est l'unique racine complexe de P.

(d) En déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

On pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

(3) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

(4) En déduire que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.

(5) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $\varphi(P_k) = \dfrac{k}{n}P_k$.

(6) Soit $P \in E$ que l'on décompose dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ sous la forme

$$P = \alpha_0P_0 + \cdots + \alpha_nP_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_kP_k.$$

Si $\varphi^j = \underbrace{\varphi \circ \varphi \cdots \circ \varphi}_{j \text{ termes}}$, déduire soigneusement des questions précédentes que

$$\forall j \geq 1,\ \varphi^j(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(\frac{k}{n}\right)^j P_k.$$

(7) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$.

(8) Déduire des questions précédentes que

$$\forall j \geq 1,\ \varphi^j(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^j P_k.$$

Partie II. Une application probabiliste.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une suite de tirages successifs avec remise.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, j]\!]$, on note $A_{j,i}$ l'événement : "on a obtenu exactement i numéros différents lors des j premiers tirages".

(1) Déterminer $\mathbb{P}(A_{1,1})$.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(A_{2,1})$ et $\mathbb{P}(A_{2,2})$.

(3) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire de la famille $(A_{j,1}, A_{j,2}, \ldots, A_{j,j})$?

(4) Pour $j \geq 2$ et $i \in [\![1, j]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{A_{j-1,i}}(A_{j,i})$ et $\mathbb{P}_{A_{j-1,i-1}}(A_{j,i})$.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note G_j le polynôme défini par

$$G_j = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}(A_{j,i}) X^i.$$

(5) Déterminer G_1 et vérifier que $G_1 = \varphi(1)$ où φ est l'endomorphisme introduit dans la Partie I.

(6) A l'aide de la question (4), montrer que pour tout $j \geq 2$,

$$(\star) \qquad G_j = \frac{1}{n} X(1-X) G'_{j-1} + X G_{j-1}.$$

(7) *Nombre moyen de numéros différents.*

Soit $m_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} i\,\mathbb{P}(A_{j,i})$: m_j représente le nombre moyen de numéros différents obtenus lors des j premiers tirages.

(a) Montrer que $m_j = G'_j(1)$. Que vaut $G_j(1)$?

(b) En déduire à l'aide de la relation $(\star)$ que

$$\forall j \geq 2,\ m_j = \left(1 - \frac{1}{n}\right) m_{j-1} + 1.$$

(c) En déduire l'expression du terme général de la suite $(m_j)_{j \geq 1}$.

(d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{m_n}{n}$.

(8) Déduire de $(\star)$ et de la Partie I que

$$(\star\star) \qquad \forall j \geq 2,\ \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}(A_{j,i}) X^i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^j P_k.$$

(9) (a) Déterminer le coefficient de X^2 dans P_1 et P_2.

(b) En déduire à l'aide de $(\star\star)$ que pour tout $j \geq 2$, $\mathbb{P}(A_{j,2}) = \dfrac{(2^{j-1}-1)(n-1)}{n^{j-1}}$.

(c) En déduire la limite de $\mathbb{P}(A_{j,2})$ lorsque j tend vers $+\infty$. Commenter.

(10) (a) Déterminer le coefficient de X^n dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^j P_k$ (on ne cherchera pas à simplifier la somme obtenue).

(b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_{j,n})$ puis la limite de cette quantité lorsque j tend vers $+\infty$. Commenter.