Corrigé de l'exo XVI (intégration)

① $|N_n| \leq \pi a^n \int_0^1 |P_n(t)|\,dt \leq \pi \frac{a^n}{n!}\int_0^1 dt = \pi . \frac{a^n}{n!}$ et comme la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge (de somme e^a) alors

$\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

② Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrons, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\pi a^n \int_0^1 Q(t)\sin(\pi t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{a^n}{\pi^{2k}}\left(Q^{(2k)}(1)+Q^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-1}}\int_0^1 Q(t)\sin(\pi t)\,dt$$

Initialisation :

$$\pi a \int_0^1 Q(t)\sin(\pi t)\,dt \overset{I.P.P}{=} \pi a\left(\left[-Q(t)\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 Q'(t)\cos(\pi t)\,dt\right)$$

$$= a\left(Q(1)+Q(0)\right) + a\int_0^1 Q'(t)\cos(\pi t)\,dt \overset{I.P.P}{=}$$

$$= a\left(Q(1)+Q(0)\right) + a\left(\underbrace{\left[Q'(t)\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 Q''(t)\sin(\pi t)\,dt\right)$$

$$= a\left(Q(1)+Q(0)\right) - \frac{a}{\pi}\int_0^1 Q''(t)\sin(\pi t)\,dt$$

Hypothèse de récurrence : ~~P~~ pour $R \in \mathbb{R}[X]$:

$$\pi a^{n-1}\int_0^1 R(t)\sin(\pi t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{a^{n-1}}{\pi^{2k}}\left(R^{(2k)}(1)+R^{(2k)}(0)\right) + (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{\pi^{2n-3}}\int_0^1 R^{(2n-2)}(t)\sin(\pi t)\,dt$$

Hérédité : $\pi a^n \int_0^1 Q(t)\sin(\pi t)\,dt = a\left(\pi a^{n-1}\int_0^1 Q(t)\sin(\pi t)\,dt\right)$

$$\overset{\text{Hypothèse de récurrence}}{=} a\left(\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{a^{n-1}}{\pi^{2k}}\left(Q^{(2k)}(1)+Q^{(2k)}(0)\right) + (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{\pi^{2n-3}}\int_0^1 Q^{(2n-2)}(t)\sin(\pi t)\,dt\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{a^{n-1}}{\pi^{2k}}\left(Q^{(2k)}(1)+Q^{(2k)}(0)\right) + (-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{\pi^{2n-2}}\left(\pi a\int_0^1 Q^{(2n-2)}(t)\sin(\pi t)\,dt\right)$$

or $\pi a \int_0^1 Q^{(2n-2)}(t)\sin(\pi t)\,dt \overset{\text{voir Initialisation}}{=} a\left(Q^{(2n-2)}(1)+Q^{(2n-2)}(0)\right) - \frac{a}{\pi}\int_0^1 Q^{(2n)}(t)\sin(\pi t)\,dt$

d'où $\pi a^n \int_0^1 Q(t)\sin(\pi t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{a^n}{\pi^{2k}}\left(Q^{(2k)}(1)+Q^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-1}}\int_0^1 Q^{(2n)}(t)\sin(\pi t)\,dt$

En particulier pour $Q = P_n$, on a :

$$N_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{a^n}{\pi^{2k}}\left(P_n^{(2k)}(1)+P_n^{(2k)}(0)\right) + (-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-1}}\int_0^1 P_n^{(2n)}(t)\sin(\pi t)\,dt.$$

③ $P_n(X) = \frac{1}{n!} X^n (1-X)^n = \frac{1}{n!} X^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i X^i$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!\,(n-i)!} X^{n+i} \text{, d'où}$$

1er cas. ($k \geq 2n+1$). Alors $P_n^{(k)} = 0$ puis $P_n^{(k)}(0) = 0$

2e cas. ($0 \leq k \leq n-1$). Alors

$$P_n^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(n+i)(n+i-1)\cdots(n+i-k+1)}{i!\,(n-i)!} X^{n-k}$$

puis $P_n^{(k)}(0) = 0$ car $0 \leq k \leq n-1$ puis $n-k \geq 1$.

3e cas. ($n \leq k \leq 2n$). Alors

$$P_n^{(k)}(X) = \sum_{i=k-n}^{n} (-1)^i \frac{(n+i)(n+i-1)\cdots(n+i-k+1)}{i!\,(n-i)!} X^{n+i-k} \text{, puis}$$

$$P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k-n} \frac{k!}{(k-n)!\,(2n-k)!}$$

$$= (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{Z} \text{ car } 0 \leq 2n-k \leq n.$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

D'autre part $P_n(1-X) = \frac{1}{n!}(1-X)^n\left(1-(1-X)\right)^n = \frac{1}{n!}(1-X)^n X^n = P_n(X)$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}(1-X) = (-1)^k P_n^{(k)}(X)$ puis

$$P_n^{(k)}(1) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

④ On a $P_n^{(2n)}(X) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$ et comme $\pi^2 = \frac{a}{b}$ alors

$$(-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-1}} \int_0^1 P_n(t) \sin(\pi t)\,dt = (-1)^n \frac{a^n}{\pi^{2n-1}} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \int_0^1 \sin(\pi t)\,dt$$

$$= \frac{a^n}{\pi^{2n-1}} \frac{(2n)!}{n!} \left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{a^n}{\pi^{2n}} \frac{(2n)!}{n!}(1+1) =$$

$= 2\frac{(2n)!}{n!} a^n \left(\frac{b}{a}\right)^n = 2\frac{(2n)!}{n!} b^n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$

$\frac{a^n}{\pi^{2k}} = a^n \frac{b^k}{a^k} = a^{n-k} b^k \in \mathbb{N}^*$ et comme $\forall k \in \mathbb{N}$: $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$

alors $N_n \in \mathbb{Z}$ en plus $N_n = \pi a^n \int_0^1 P_n(t)\,dt \geq 0$ ~~d'où $N_n \in \mathbb{N}^*$~~

Car $P_n \geq 0$ sur $[0,1]$ et $P_n \neq 0$ d'où $N_n \in \mathbb{N}^*$ C'est impossible car $N_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, par conséquence π^2 est irrationnel.