PROBLÈME : RÉSULTANT DE DEUX POLYNÔMES

I. Définition et propriétés

Soient p et q deux entiers naturels non nuls,

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros. Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ où $\mathbb{C}_k[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant k$.
Soit u l'application de E dans F définie pour $(A,B) \in E$ par : $u(A,B) = PA + QB$.

1. **Cas où u est bijective**

   Pour quelle structure algébrique u est-elle un morphisme ? En déduire que u est bijective si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

2. **Matrice de u**

   On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \cdots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

(a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

(b) Montrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux, donc que $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine complexe commune.

3. **Racine multiple**

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante en terme de résultant pour qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admette une racine multiple dans $\mathbb{C}$.

   (b) *Application* : étant donnés $a, b, c \in \mathbb{C}$, en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que :

      i. le polynôme $aX^2 + bX + c$ admette une racine multiple.

      ii. le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

4. **Équation de Bézout**

   Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

   (a) Montrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

   (b) À l'aide de l'application u, trouver un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $PA_0 + QB_0 = 1$.

   (c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $PA + QB = 1$. On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

II. Applications

5. **Matrices à valeurs propres toutes distinctes**

   (a) Montrer que l'ensemble D_0 des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres deux à deux distinctes forme un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) En déduire que D_0 est l'intérieur (topologique) de l'ensemble D des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. **Nombre algébrique**

   En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_x(X) = (x - X)^2 - 7$, $x \in \mathbb{C}$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

7. **Courbe algébrique paramétrée**

   Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe paramétrée $t \mapsto (t^2 + t, t^2 - t + 1)$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ l'image de cette courbe. Montrer qu'il existe un polynome réel P à deux indéterminées tel qu'un point (x, y) du plan appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation polynomiale $P(x, y) = 0$ et donner un tel polynôme P.