Sujet d'analyse - Agrégation interne 2020-2021

Durée : 6 heures

CCP PSI 2014 - Sujet 1 / Polytechnique PC 1999 - Sujet 2

Les calculatrices sont autorisées.

Notations, définitions et rappels

Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

I. Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1. Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t$.

I.2. Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

I.3. Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe.

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0,1/\sqrt{2}]$ par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

I.3.2 Retrouver le résultat de la question précédente sans calcul, par des considérations géométriques.

I.4. Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t^2$. Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties ou en s'inspirant de la question **I.2**.

II. Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole. On considère, pour ce faire, la fonction f définie sur $[1/2,1]$ par $f(t) = 1/t$.

II.1. Expression intégrale de $L(f)$

II.1.1 Donner une expression intégrale de $L(f)$.

II.1.2 Montrer que $L(f)$ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à l'intervalle $[1,2]$.

II.2. **Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique**

II.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

II.2.2 Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} t^{4n-2}$$

II.2.3 On note, pour tout entier n, $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

II.2.4 En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

II.2.5 Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

III. Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geq 1$, aux fonctions puissances p_n définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1],\ p_n(t) = t^n$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1+n^2 t^{2n-2}}\, dt$$

III.1. Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2.

III.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

III.2. Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

III.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\, dt = \mu_n \text{ où } \mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$$

III.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

III.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite.

III.3. Plus généralement, montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a alors $L(f) < 2$.

IV. Un résultat inattendu

IV.1. Etude de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$

IV.1.1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

IV.1.2 Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

IV.1.3 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ est convergente.

IV.1.4 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\, dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\, dt$.

IV.2. On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

IV.2.1 Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

IV.2.2 Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

IV.2.3 Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

IV.3. Pour tout réel $x \in]0,1]$, on désigne par $\lambda(x)$ la longueur de la courbe représentative de la restriction de la fonction f au segment $[x,1]$. Donner une expression intégrale de $\lambda(x)$ pour $x \in]0,1]$, puis montrer que $\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

V. Continuité de la fonction longueur

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $E_1 = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| := |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

V.1. Comparaison des normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$

V.1.1 Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

V.1.2 Montrer que

$$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \le \|f\|$$

V.1.3 Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

V.2. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

V.2.1 Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

V.2.2 On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \ge \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

V.2.3 L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|_\infty)$?

V.2.4 L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|)$?

VI. Comparaison des normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

définit une norme sur l'espace E.

Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ respectivement. Pour $f \in E$, la notation $d(f,A)$ désigne la distance de f à A *relativement à la norme* $\|.\|_2$ (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme $\|.\|_\infty$).

Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de E défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

VI.1. Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de E.

VI.2. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que pour toute partie A de E, on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \left\{f \in E \ / \ f(0) = 0\right\}$.

VI.3. Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.

VI.4. En déduire que V_0 est dense dans E pour la norme $\|.\|_2$, mais n'est *pas* dense pour la norme $\|.\|_\infty$.

VI.5. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

VI.6. Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de E est dense pour la norme $\|.\|_\infty$ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.

VI.7. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de E est dense pour la norme $\|.\|_2$ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

VII. Norme d'une forme linéaire

On considère la forme linéaire L définie sur E par

$$\forall f \in E,\ L(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

VII.1. On pose : $|||L|||_\infty = \sup\limits_{f\in E, \|f\|_\infty \leq 1} |L(f)|$ et $|||L|||_2 = \sup\limits_{f\in E, \|f\|_2 \leq 1} |L(f)|$.

VII.1.a. Justifier l'existence de $|||L|||_\infty$ (resp. de $|||L|||_2$) et montrer qu'il existe $g \in E$ tel que $\|g\|_\infty = 1$ et $|L(g)| = |||L|||_\infty$ (resp. $h \in E$ tel que $\|h\|_2 = 1$ et $|L(h)| = |||L|||_2$).

VII.1.b. Calculer $|||L|||_\infty$ et $|||L|||_2$.

On désigne par F_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour $P \in F_n$ tel que $P(x) = \sum\limits_{p=0}^n a_p x^p$, on pose :

$$N_\infty(P) = \sup_{0\leq p\leq n} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^n (a_p)^2\right)^{1/2}.$$

VII.2. Montrer que $N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{n+1}N_\infty$ et que ces inégalités sont optimales (on pourra considérer $P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^p$).

VII.3. On définit $\mathcal{N}_\infty(L) = \sup\limits_{P\in F_n, N_\infty(P)\leq 1} |L(P)|$ et $\mathcal{N}_2(L) = \sup\limits_{P\in F_n, N_2(P)\leq 1} |L(P)|$.

VII.3.a. Justifier l'existence de $\mathcal{N}_\infty(L)$ et de $\mathcal{N}_2(L)$.

VII.3.b. Montrer :

$$\forall P \in F_n,\ |L(P)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right) N_\infty(P).$$

Trouver $Q_\infty \in F_n$ tel que $N_\infty(Q_\infty) = 1$ et $|L(Q_\infty)| = \mathcal{N}_\infty(L)$.

VII.3.c. Montrer :

$$\forall P \in F_n,\ |L(P)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1}\right)^2\right)^{1/2} N_2(P).$$

Trouver $Q_2 \in F_n$ tel que $N_2(Q_2) = 1$ et $|L(Q_2)| = \mathcal{N}_2(L)$.

Soit F l'espace vectoriel réel des fonctions polynomiales de degré quelconque.

Pour $P \in F$ de degré $d(P)$, définie par $P(x) = \sum\limits_{p=0}^{d(P)} a_p x^p$, on pose :

$$N_\infty(P) = \sup_{0\leq p\leq d(P)} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^{d(P)} (a_p)^2\right)^{1/2}$$

et l'on définit ainsi des normes sur F. Pour $P \in F$, on pose encore $L(P) = \int_0^1 P(x)dx$.

VII.4.a. Trouver une suite $(P_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de F telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_\infty(P_k) = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} L(P_k) = +\infty$.

VII.4.b. L'application L est-elle continue ? (On précisera les espaces et les normes considérés.)

VII.5.a. Montrer que $\sup\limits_{P\in F, N_2(P)\leq 1} |L(P)|$ existe. On désigne ce nombre par $|||L|||$.

VII.5.b. Existe-t-il une fonction polynomiale $Q \in F$ telle que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$?