Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathbb{P}[A]$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et intégrables, alors

$$\mathbb{E}[Y_1 \cdots Y_n] = \mathbb{E}[Y_1] \cdots \mathbb{E}[Y_n]$$

On note log la fonction logarithme népérien. Par convention, on pose $\log(0) = -\infty$.
Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \log\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right)$$

1. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ est d'éspérance finie pour tout $\lambda > 0$. Montrer en utilisant l'inégalité de Markov que pour tout $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[Z \geq t] \leq \exp(-\lambda t)\mathbb{E}[\exp(\lambda Z)]$$

2. Montrer que $\mathbb{P}[S_n \geq 0] = \mathbb{P}[S_n \leq 0]$
   Montrer que $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq t]) \leq \inf_{\lambda \geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t)$$

Pour chaque $\lambda \geq 0$, on pose

$$m(\lambda) = \frac{\mathbb{E}[X_1 \exp(\lambda X_1)]}{\mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)]}$$

ainsi que

$$D_n(\lambda) = \exp(\lambda n S_n - n\psi(\lambda))$$

4. Montrer que si $\lambda \geq 0$, $m(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$.
   Montrer que la fonction m est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $t \in [0, 1[$, il existe un unique $\lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t$.
5. (a) Pour $n \geq 2$ et $\lambda \geq 0$, montrer que
   Si $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{E}[(X_i - m(\lambda))\exp(\lambda X_i - \psi(\lambda))] = 0$.
   Si $1 \leq i < j \leq n$, $\mathbb{E}[(X_i - m(\lambda))(X_j - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0$.

   (b) En déduire que, pour $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq \frac{4}{n}$$

Pour tous $n \geq 1$, $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on note $I_n(\lambda, \varepsilon)$ la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Montrer que
$$\mathbb{P}[|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon] \geq \mathbb{E}[I_n(\lambda,\varepsilon)\exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon))]$$

7. Montrer que
$$\mathbb{E}[I_n(\lambda,\varepsilon)D_n(\lambda)] \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}$$

8. (a) En déduire, pour chaque $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'une suite $(u_n(\varepsilon))_{n\geq 1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et telle que
$$\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon]) \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda\varepsilon + u_n(\varepsilon)$$

   (b) Conclure que pour tout $t \in [0, 1[$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(\mathbb{P}[S_n \geq t]) = \inf_{\lambda\geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t)$$
(On pourra introduire pour $\lambda \geq 0$ et $\epsilon < 1 - m(\lambda)$, λ_ϵ tel que $m(\lambda_\epsilon) = m(\lambda) + \epsilon$).

   (c) La formule précédente est-elle encore valide pour $t = 1$?

9. (a) Déterminer pour $t \in [0, 1[$, $\inf_{\lambda\geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t)$.

   (b) Quelle est la loi de $\frac{n}{2}(S_n + 1)$?

   (c) Soit $t \in [0, 1[$. Soit pour $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}/|k-\frac{n}{2}|\geq nt} \binom{n}{k}$.

   Déterminer la limite de $U_n^{\frac{1}{n}}$.