UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES 2020-2021

Préparation à l'agrégation interne

Devoir à la maison à rendre le 2 septembre 2020

Sur les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

Le but de ce problème est de caractériser les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que l'identité.

Notations et conventions

Dans ce problème n désigne un entier naturel.

On appelle **centre** d'un groupe G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.

Soit G un groupe fini (noté multiplicativement) de cardinal $|G|$. On note $\mathbf{1}_G$ l'unité de G. On rappelle que tout élément g de G vérifie $g^{|G|} = \mathbf{1}_G$ et on admet que si p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe $g \in G \setminus \{\mathbf{1}_G\}$ tel que $g^p = \mathbf{1}_G$.

Soit E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles de E et Id_E l'identité de E. Si ϕ est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}(\phi)$ la trace de ϕ et $\det(\phi)$ son déterminant.

Si G est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E, on note V^G le sous-espace vectoriel de E formé des vecteurs fixés par G :

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G, g(v) = v\}.$$

On dit que V est **stable** par G si quels que soient $g \in G$, $v \in V$, on a $g(v) \in V$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0\}$.

De même, pour la struture affine de E, si G est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(E)$ et F un sous-espace affine de E, on note F^G le sous-espace affine de E formé des points de F fixés par G :

$$F^G = \{x \in F \mid \forall g \in G, g(x) = x\}.$$

On dit que F est **stable** par G si quels que soient $g \in G$, $x \in F$, on a $g(x) \in F$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients complexes et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note D_n la partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ à $2n$ éléments formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -c^k \\ -c^{-k} & 0 \end{pmatrix}$, où k est un entier compris entre 0 et $n-1$ et $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

Si $\sigma \in S_n$ est une permutation de l'ensemble $\{1, ..., n\}$, on note A_σ la matrice de permutation de coefficient $a_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ valant 1 si $i = \sigma(j)$, 0 sinon. Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E, la matrice A_σ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'automorphisme $g_{\sigma,\mathcal{B}}$ de E qui envoie e_j sur $e_{\sigma(j)}$ pour tout j.

I — Centre de $\mathrm{GL}(E)$

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

1. Soient f un endomorphisme de E et g un automorphisme de E. Si x est un vecteur propre de f pour une valeur propre λ, que peut-on dire du vecteur $g(x)$ pour l'endomorphisme gfg^{-1} ?
2. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, 2, ..., n)$. Déduire de la question précédente que les automorphismes de E qui commutent avec f sont exactement ceux dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
3. Soit f un endomorphisme de E diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que si f commute avec les automorphismes $g_{\sigma,\mathcal{B}}$ pour tous $\sigma \in S_n$, alors f est une homothétie.
4. Déduire des questions précédentes que le centre de $\mathrm{GL}(E)$ est formés des homothéties de rapport non nul.

II — Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(E)$

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

5. Montrer que pour tout $g \in G$, g est diagonalisable (indication : utiliser un polynôme annulateur).
6. Montrer que si G est commutatif, tous les éléments de G sont diagonalisables dans une même base.

III — Isométries du triangle

7. Montrer que D_n est un groupe.

   On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé centré en O. On s'intéresse au sous-groupe $\widetilde{D_3}$ des isométries affines du plan qui laissent stable l'ensemble $\{A, B, C\}$ des sommets d'un triangle équilatéral ABC de centre O.

8. (a) Montrer que O est fixé par tous les éléments de $\widetilde{D_3}$.

   (b) Faire l'inventaire des éléments de $\widetilde{D_3}$ et déterminer l'ensemble $\mathcal{P}^{\widetilde{D_3}}$ des points fixes de $\widetilde{D_3}$ dans le plan.

   (c) Montrer que $\widetilde{D_3}$ est isomorphe au groupe de permutation S_3.

   (d) En se plaçant dans la base (non orthonormée) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, démontrer que le groupe $\widetilde{D_3}$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ formé de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont dans $\{-1, 0, 1\}$.

   (e) Diagonaliser dans $\mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire que le groupe $\widetilde{D_3}$ est isomorphe au groupe D_3.

IV — Lemme de Schur

Notons $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $E = \mathbb{C}^n$. Notons I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$ l'application :

$$i(B) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \\ M \longmapsto BMB^{-1} \end{array} \right.$$

9. Montrer que $i : B \longmapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ (action du groupe G sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$), et que i est injectif (l'action est fidèle) si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

   On note $\widetilde{G}$ l'image par i de G. Ainsi $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $i(B)(M) = M$ pour tout B dans $\widetilde{G}$.

10. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ sont des sous-espaces stables par G.

11. On suppose dans cette question que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{A}^{\widetilde{G}}$; démontrer que M est soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{A}^{\widetilde{G}}$ est de dimension 1.

12. Soient $M, N \in \mathcal{A}$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{A}$ suivant, $\Phi : X \longmapsto MXN$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{Tr}(N)$.

13. Soit $P = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} B$.

    (a) Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.

    (b) Démontrer que $\mathrm{Im}(P) = E^G$ et en déduire que $\dim\left(E^G\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\, B$ (indication : pour un projecteur, le rang est égal à la trace).

14. Démontrer que $\dim\left(\mathcal{A}^{\widetilde{G}}\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\left(B^{-1}\right) \mathrm{Tr}(B)$ (indication : on pourra considérer d'abord le cas où i est injectif.)

   On suppose, jusqu'à la fin de cette partie, que E est irréductible pour G.

15. (a) Soit X dans $\mathcal{A}$ une matrice qui commute avec toutes les matrices de G. Démontrer que $X = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(X) I_n$.

    (b) Soit $Y = \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{Tr}\left(B^{-1}\right) B$. Démontrer que $Y = \dfrac{|G|}{n} I_n$.

   On garde la notation Y jusqu'à la fin de cette partie.

16. Soit $\zeta = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/|G|}$. On note

$$\mathbb{Z}_G = \left\{ a_0\zeta^0 + a_1\zeta^1 + \ldots + a_{|G|-1}\zeta^{|G|-1}, a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

   et $\mathbb{Z}_G[G]$ les combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Z}_G$, de matrices de G.

    (a) Démontrer que pour tout $B \in G$, $\mathrm{Tr}(B)$ est dans $\mathbb{Z}_G$, puis que Y est dans $\mathbb{Z}_G[G]$.

    (b) On note $(C_k)_{1 \leq k \leq |G|^2}$ les $|G|^2$ matrices $\zeta^i B$ (où $1 \leq i \leq |G|$ et $B \in G$) de $\mathbb{Z}_G[G]$. Démontrer qu'on peut trouver des coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq |G|^2}$ dans $\mathbb{Z}$ tels que pour tous $1 \leq k \leq |G|^2$, $YC_k = \displaystyle\sum_{1 \leq \ell \leq |G|^2} a_{\ell k} C_\ell$.

(c) On pose $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq |G|^2}$ et $R = \dfrac{|G|}{n} I_{|G|^2} - A$. Démontrer que $\det(R) = 0$.

(d) Démontrer que $\dfrac{|G|}{n}$ est racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré $|G|^2$ et de terme dominant égal à 1. En déduire que n divise $|G|$.

V — Une caractérisation de D_n, n impair

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^2$, et posons pour tout $(v, w) \in \mathbb{C}^2$

$$\langle v, w\rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{B\in G} \langle B(v), B(w)\rangle$$

17. (a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^2$, vérifiant : quels que soient $(v, w) \in \mathbb{C}^2$ et $B \in G$, $\langle B(v), B(w)\rangle_0 = \langle v, w\rangle_0$.

    (b) Démontrer que si $\mathbb{C}^2$ n'est pas irréductible pour G, il existe une base orthogonale de $\mathbb{C}^2$ pour le produit scalaire hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ qui diagonalise les matrices de G. En déduire que G est commutatif.

18. (a) On note $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices de déterminant 1. Quelles sont les matrices $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = I_2$?

    (b) Démontrer que si $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est non commutatif, alors $|G|$ est pair. En déduire que $-I_2 \in G$ (utiliser les rappels du préambule).

On suppose par la suite que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ne contenant aucune homothétie autre que l'identité. On note $G_0 = G \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

19. (a) Démontrer que G_0 est commutatif. En déduire qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et un sous-groupe Γ_0 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ formé de matrices diagonales de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ tels que $B \longmapsto PBP^{-1}$ soit un isomorphisme de G_0 sur Γ_0.

    (b) Démontrer qu'il existe un entier m tel que Γ_0 soit le groupe $\mathcal{Z}_m$ des matrices $\begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & c^{-k} \end{pmatrix}$ où $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/m}$ et k prend les valeurs de 0 à $m-1$.

    (c) Si $G_0 = \{I_2\}$, démontrer qu'alors G est sommutatif (considérer le morphisme de groupes $\det : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$).

On suppose dans les questions 20 et 21 que G n'est pas commutatif et que G_0 est exactement le groupe $\mathcal{Z}_m$.

20. Soit B_0 une matrice dans G qui n'est pas diagonale.

    (a) Démontrer que pour tout $C \in \mathcal{Z}_m$ on a $B_0 C B_0^{-1} \in \mathcal{Z}_m$. En déduire que B_0 est de la forme $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$ avec $b, b' \in \mathbb{C}$.

    (b) Calculer B_0^2 et en déduire que $b' = b^{-1}$.

    (c) Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ diagonale telle que $QB_0Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. (a) Soit B une matrice diagonale dans G. Montrer que $B \in \mathcal{Z}_m$.

    (b) Montrer que $B \longmapsto QBQ^{-1}$ est un isomorphisme de G sur le groupe D_m.

22. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui ne contient pas d'homothétie autre que l'identité.

    (a) Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et deux morphismes de groupes $\chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tels que toute matrice de G s'écrive $B = P \begin{pmatrix} \chi_1(B) & 0 \\ 0 & \chi_2(B) \end{pmatrix} P^{-1}$.

    (b) Montrer que $B \longmapsto \chi_1(B)\chi_2(B)^{-1}$ est un isomorphisme de G dans le groupe des racines $|G|$-ièmes de l'unité.

    (c) Montrer que G est le groupe des matrices de la forme $P \begin{pmatrix} c^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} P^{-1}$, k variant de 0 à $|G| - 1$, où l'on a posé $c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi p/|G|}$ et $d = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi q/|G|}$, p et q étant deux entiers tels que $p - q$ est premier avec $|G|$.

23. Décrire à partir des questions précédentes tous les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ne contenant pas d'homothétie autre que l'identité.

24. Montrer que le groupe fini commutatif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne peut pas être isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.