UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES 2020-2021

Préparation à l'agrégation interne

Corrigé du devoir à la maison du 20 octobre 2020

Quelques propriétés de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

1. (a) L'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, les propriétés suivantes étant évidentes :
   - $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ contient la matrice nulle, neutre pour $+$, et la matrice unité, neutre pour $\times$, de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$,
   - si deux matrices sont à coefficients entiers, leur somme et leur produit est à coefficients entiers,
   - si une matrice est à coefficient entiers, son opposé est à coefficients entiers.

   (b) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Supposons que $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. Alors il existe $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $AB = I_2$. Donc $\det A. \det B = 1$. Or $\det A$ et $\det B$ sont des entiers et les seuls entiers inversibles de $\mathbb{Z}$ sont ± 1. Cela montre que $|\det A| = |ad - bc| = 1$. Réciproquement supposons que $|\det A| = |ad - bc| = 1$. Alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{com} A)^t$ est à coefficients entiers, c'est donc un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ inverse de A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Cela montre que $A \in GL_2(\mathbb{Z})$.

   Commentaires : dans cette question, il faut être clair sur ce que signifie le mot inversible. Comme il y a trois anneaux, $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, il faut préciser si une matrice inversible signifie inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ou dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. De même la notation A^{-1} peut prêter à confusion si on n'a pas montré dans la question précédente que $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ou de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2. (a) L'application déterminant de $GL_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes (multiplicatifs). Comme $SL_2(\mathbb{Z})$ est le noyau de ce morphisme, c'est un sous-groupe (distingué) de $GL_2(\mathbb{Z})$.

   Commentaires : Pour montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, on montre souvent que c'est le noyau ou l'image d'une application linéaire. Pour les groupes la même technique est utile ! Pensez-y.

   (b) Soit $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$. On a $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $3d - 5c = 1$. Cette équation possède $(1, 2)$ comme solution particulière. Donc $3d - 5c = 1$ si et seulement si $3(d-1) - 5(c-2) = 0$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, si $3(d-1) = 5(c-2)$, alors 3 divise $c - 2$, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c - 2 = 3k$, donc $c = 2 + 3k$. On a alors $d - 1 = 5k$, donc $d = 1 + 5k$. Réciproquement si c et d sont de cette forme, alors $3(d-1) = 5(c-2)$. Cela montre que :
   $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(c, d) = (1, 2) + k(3, 5)$.

Commentaires : On reconnait la solution "générale" comme somme d'une solution particulière et de la "solution générale" de l'équation sans second membre, ce qui est caractéristique d'une équation affine. Du fait que 3 et 5 sont premiers entre eux, on retrouve les propriétés de l'ensemble des solutions d'une équation affine dans le cadre habituel (sur un corps), espace affine passant par un point (solution particulière) et dirigé par un espace vectoriel (ici de dimension 1). Dans cette question on pouvait invoquer la résolution générale des équations diophantiennes linéaires de degré 1, mais dans ce cas il faut signaler qu'on fait appel à un résultat général et dire impérativement que 3 et 5 sont premiers entre eux.

(c) Soit $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ou $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -c & -d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. D'après la question précédente, on a donc : $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,d) = \pm(1,2) + k(3,5)$.

(d) Soit (a,b) de $\mathbb{Z}^2$. Il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = \pm 1$ donc si et seulement si il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$ donc si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

Commentaires : dans de nombreuses copies cette question n'a pas été bien rédigée. Soyez clairs sur les quantificateurs sur a, b, c et d.

3. La matrice T n'a qu'une valeur propre et n'est pas diagonale, elle n'est donc pas diagonalisable. Elle est triangulaire donc trigonalisable.
La matrice S possède deux valeurs propres non réelles i et $-i$, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mais non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Une forme réduite est $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et une matrice de passage P, telle que $S = PDP^{-1}$, est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.
La matrice $TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$, qui possède deux racines non réelles $-j$ et $-\overline{j}$. Donc TS est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Une forme réduite est $E = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\overline{j} \end{pmatrix}$ et une matrice de passage Q, telle que $TS = QEQ^{-1}$, est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\overline{j} & -j \end{pmatrix}$.

4. (a) Une matrice A vérifiant $A^2 = I_2$ annule le polynôme $X^2 - 1$ qui est scindé à racines simples. Elle est donc diagonalisable à spectre inclus dans $\{\pm 1\}$. Étant de déterminant $+1$, elle ne peut qu'être semblable, donc égale, à $\pm I_2$. Réciproquement ces deux matrices conviennent.
(b) Les seules matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ vérifiant l'équation $A^2 = I_2$ sont donc $\pm I_2$.

5. (a) Soit A une matrice telle que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elle annule le polynôme $X^2 + 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et à spectre inclus dans $\{\pm \mathrm{i}\}$. Étant de déterminant $+1$, elle ne peut qu'être semblable à $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, donc de trace nulle.

(b) Étant de trace nulle, une matrice solution A est donc de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Pour être dans $SL_2(\mathbb{Z})$, il faut $a^2 + bc = -1$. Réciproquement le calcul montre qu'une telle matrice vérifie alors $A^2 = -I_2$.

6. (a) C'est un résultat classique, noter que la réciproque est évidente. Supposons que U et V sont semblables sur $\mathbb{C}$. Donc il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $U = P^{-1}VP$, c'est-à-dire $PU = VP$. On écrit $P = R + iS$ avec $R, S \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui donne $RU = VR$ et $SU = VS$ en prenant les parties réelles et imaginaires de l'égalité $PU = VP$. Comme $\det(R + tS)$ est un polynôme en t qui ne s'annule pas pour i, c'est un polynôme non nul. Donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $Q = R + tS \in GL_2(\mathbb{R})$. On a alors $QU = VQ$, ce qui montre que U et V sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On a montré à la question 5.(a) que toutes les solutions de l'équation $A^2 = -I_2$ sont semblables sur $\mathbb{C}$ à la matrice $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et à la question 3 que S est également semblable sur $\mathbb{C}$ à cette matrice [d'ailleurs $S^2 = -I_2$ est immédiat]. Donc les solutions de $A^2 = -I_2$ dans $SL_2(\mathbb{Z})$ sont semblables à S sur $\mathbb{C}$, et donc sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.