UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES 2020-2021

Préparation à l'agrégation interne

Devoir à la maison à rendre le 20 octobre 2020

Quelques propriétés de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On pose :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau.

   On note $GL_2(\mathbb{Z})$ le groupe formé des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ (groupe des unités de l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$).

   (b) Pour tous entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, montrer que
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } |ad - bc| = 1.$$

   On pose
   $$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) : ad - bc = 1 \right\}.$$

2. (a) Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

   (b) Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $SL_2(\mathbb{Z})$.

   (c) Déterminer l'ensemble des couples $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$.

   (d) Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour qu'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $GL_2(\mathbb{Z})$?

3. Soient S et T les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ définis par
   $$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Pour chacune des trois matrices T, S et TS, répondre aux questions suivantes :

(a) La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

(b) La matrice est-elle diagonalisable, ou à défaut trigonalisable, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$? Donner une forme réduite éventuelle ainsi qu'une matrice de passage.

4. On cherche les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

   (a) Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser les formes réduites diagonales possibles de A.

   (b) En déduire l'ensemble des matrices solutions A.

5. On cherche les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ telles que
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Soit A une telle matrice. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer la trace $\mathrm{Tr}\,(A)$ de A.

   (b) Donner la forme générale des matrices solutions A en fonction des trois paramètres a, b, c et d'une relation liant ces trois paramètres.

6.

   (a) Démontrer que si deux matrices U et V de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que les matrices A de $SL_2(\mathbb{Z})$ solutions de l'équation :
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.