Courbes dans le plan et dans l'espace

9 décembre 2020

Courbes paramétrées - Courbes géométriques

• Courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$: application $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, I réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ deux-à-deux disjoints, γ de classe $\mathcal{C}^k$.

• Support de γ : $\Gamma := \gamma(I)$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exemple : - $\gamma_1 : t \in]-\pi, \pi[\mapsto (\cos(t), \sin(t))$
- $\gamma_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(2t), \cos(4t))$
- $\gamma_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

• $\mathcal{C}^k$ re-paramétrage de γ : $\gamma_1 : J \to \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) est un $\mathcal{C}^k$ - reparamétrage de $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) s'il existe un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme $\varphi : J \to I$ tel que $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

Exemple : donner φ pour γ_1 et γ_3. Pour γ_1 et γ_2 ?

• Classes d'équivalence de courbes paramétrées : 2 courbes γ_1 et γ_2 de classe $\mathcal{C}^k$ sont équivalentes ($\gamma_1 \sim_k \gamma_2$) si γ_2 est un $\mathcal{C}^k$ re-paramétrage de γ_1.
- Vérifier que $\sim_k$ est une relation d'équivalence.
- Mq. si $\gamma_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t^3)$, $\gamma_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^6)$ alors : $\forall k \geq 1$, $\gamma_1 \not\sim_k \gamma_2$.

• Courbe géométrique (resp. géométrique orientée) de classe $\mathcal{C}^k$: classe d'équivalence pour $\sim_k$ (resp. pour $\sim'_k$ avec $\varphi' > 0$ sur J).

Régularité des courbes et objets géométriques remarquables

Les courbes étant de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$, bcp. de résultats se montrent par des DL.

• Courbe paramétrée. $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est *régulière* en $t_0 \in I$ si $\gamma'(t) \neq 0$. Alors $\gamma(t_0) + \mathbb{R}\gamma'(t_0)$ est appelée *tangente* à la courbe paramétrée γ en t_0. Si γ est injective, on parle de la tangente en $\gamma(t_0)$.

• Courbe géométrique. Une courbe géométrique est dite *régulière* si l'un de ses représentants est régulier en tout point.

Montrer qu'il en est de même pour tous les représentants de la courbe.

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est un rep. d'une courbe géométrique régulière, alors $\gamma(t) + \mathbb{R}\gamma'(t)$ est appelé "*tangente à la courbe géométrique*" au point $\gamma(t)$.

Montrer que la tangente en tout point à une courbe géométrique est bien définie (i.e. ne dépend pas du représentant choisi).

• Plan tangent, plan normal, plan osculateur. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 3$. Tout plan contenant la tangente s'appelle *plan tangent* (pas d'unicité).
Le plan perpendiculaire à la tangente s'appelle *plan normal* (unique) et toute droite perpendiculaire à la tangente s'appelle *droite normale* (pas d'unicité).
Si $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont linéairement indépendants, le point $t \in I$ est dit *birégulier*. On appelle alors *plan osculateur* (unique) en t le plan affine $\gamma(t) + Vect_{\mathbb{R}}(\gamma'(t), \gamma''(t))$.
Si γ est injective, on parle de plan osculateur au point $\gamma(t)$.

Soit $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$. Déterminer la tangente, le plan normal et le plan osculateur au point $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Idem avec $\gamma_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos(t), \sin(t), t^2)$.

Etude des courbes planes paramétrées $\gamma : t \in I \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

1. Domaine d'étude (ensemble de définition, périodicité, symétries, ...)
2. Tangentes : S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que γ soit dérivable jusquà l'ordre k en t_0 et tel que $\gamma^{(k)}(t_0) \neq 0$, alors Γ admet une tangente en $\gamma(t_0)$. Elle a pour vecteur directeur la première dérivée $\gamma^{(p)}(t_0)$ non nulle.
3. Position de la courbe par rapport à la tangente : voir la dispositive suivante.
4. Concavité.

   Soit $\gamma(t_0)$ un point birégulier. Le signe du déterminant

   $$det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) = x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)$$

   donne la concavité de la courbe au point $\gamma(t_0)$:

   - $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) > 0$: concavité tournée vers le haut,
   - $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) < 0$: concavité tournée vers le bas.
5. Branches infinies.
6. Points multiples.
7. Tracé de la courbe.

Points réguliers, points de rebroussement - Exemples

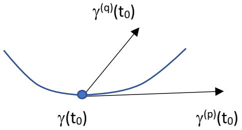
$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Soit $t \in I$ et soient

$$p := \inf\{n \geq 1/ \ \gamma^{(n)}(t_0) \neq 0\}$$

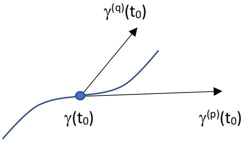
et

$$q = \inf\{n \geq 1/ \ dim_{\mathbb{R}} Vect(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(n)}(t_0)) = 2\}.$$

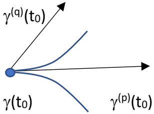
Si $q < +\infty$, alors :



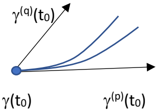
Point ordinaire (p impair, q pair)



Point d'inflexion (p impair, q impair)



Point de rebroussement de 1ère espèce (p pair, q impair)



Point de rebroussement de 2nde espèce (p pair, q pair)

Etude des courbes définies en polaire - I

On considère $\overrightarrow{O\gamma(\theta)} = r(\theta)\vec{u}_\theta,\ \theta \in I \subset \mathbb{R}$.

Noter que $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$, $\gamma'(\theta) = r'(\theta)\vec{u}_\theta + r(\theta)\vec{u'}_\theta$ avec $\vec{u'}(\theta) = Rot_{+\pi/2}(\vec{u}_\theta)$.

1. Ensemble de définition, périodicité (conséquence de l'égalité $r(\theta + T) = r(\theta)$), symétries (conséquences de $r(\theta) = r(-\theta)$ ou $r(\theta) = -r(\pi - \theta)$, $r(\theta) = -r(-\theta)$ ou $r(\theta) = r(\pi - \theta)$, $r(\theta) = r(\pi + \theta)$).

2. Etude des variations et du signe de r

3. Etude des tangentes en les points remarquables :

   - Si $\gamma'(\theta) \neq 0$, dans le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{u'}_\theta)$, la tangente à la courbe au point $\gamma(\theta)$ a pour pente $r(\theta)/r'(\theta)$.

   - Si $r'(\theta) = 0$, la tangente est parallèle au vecteur $\vec{u'}_\theta$.

   - Si $\gamma'(\theta_0) = 0$, la courbe passe par l'origine et s'il existe $k \geq 2$ tel que $r^{(k)}(\theta_0) \neq 0$, la tangente est la droite d'angle polaire $\theta = \theta_0$.

Etude des courbes définies en polaire - II

4. Branches infinies :

   - $\lim_{|\theta|\to+\infty} |r(\theta)| = +\infty$: branche infinie en spirale,

   - $\lim_{|\theta|\to+\infty} |r(\theta)| = r_0 \in \mathbb{R}$: cercle asymptotique centré en O de rayon r_0,

   - $\lim_{\theta\to\theta_0} |r(\theta)| = +\infty$: branche infinie de dir asympt. $\mathbb{R}\vec{u}_{\theta_0}$.

   Coordonnées cartésiennes de $\gamma(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{u'}_\theta)$:
   $X = r(\theta)\cos(\theta-\theta_0)$, $Y = r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$. Noter que $\lim_{\theta\to\theta_0} |X| = +\infty$.

   - Si $\lim_{\theta\to\theta_0} |Y| = +\infty$: branche parabolique de dir. $\vec{u}_{\theta_0}$.

   - Si $\lim_{\theta\to\theta_0} Y = k \in \mathbb{R}$: asymptote d'équation $Y = k$. Position de la courbe par rapport à l'asymptote : dépend du signe de $Y - k$.

5. Points multiples :

   - $\exists k \in \mathbb{Z}/\ r(\theta + 2k\pi)$ ou $r(\theta + (2k+1)\pi) = -r(\theta)$,

   - L'équation $r(\theta) = 0$ admet plusieurs solutions.

6. Tracé de la courbe.

Abscisse curviligne - Longueur

• Abscisse curviligne. Soit $\gamma : [a,b[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^3$. On suppose que l'intégrale $\int_a^t \|\gamma'(x)\| dx$ converge pour $t \in]a,b[$.

Abscisse curviligne s de γ : $s : t \in]a,b[\mapsto \displaystyle\int_a^t \|\gamma'(x)\| dx$.

Soit γ la courbe définie en polaire par : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ r(\theta) = ae^{b\theta},\ a, b > 0$. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\|\gamma'(\theta)\| = a\sqrt{1+b^2}e^{b\theta}$. En déduire que $s(\theta) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} r(\theta)$.

• Longueur de γ : $L(\gamma) = \lim_{t \to b} s(t) = \int_a^b \|\gamma'(x)\| dx$ si l'intégrale converge.

Montrer que $L(\gamma) = L(\gamma_1)$ si γ_1 re-paramétrage de γ.

• Paramétrage par longueur d'arc (ou par l'ascisse curviligne). On dit que γ est paramétrée par la longueur d'arc si : $\forall t \in I,\ \|\gamma'(t)\| = 1$. Noter alors que si $\gamma : [a,b[\to \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ L(\gamma) = b - a$.

Proposition. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une courbe de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, régulière. Alors, il existe un $\mathcal{C}^k$ -reparamétrage γ_1 de γ tel que γ_1 soit paramétrée par la longueur d'arc.

Montrer que $\varphi = s^{-1}$, où s est l'abscisse curviligne de γ, est un $\mathcal{C}^k$ re-paramétrage de γ et que $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ est paramétrée par la longueur d'arc.

Tangente - Normale - Cercle osculateur

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^2$, paramétrée par la longueur d'arc.

- Tangente de γ en s : $\vec{t}(s) = \gamma'(s)$.
- Courbure (principale) de γ en s : $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.
- Normale principale de γ en s. Si $\gamma''(s) \neq 0$ (s est point birégulier), $\vec{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{k(s)}$.
- Centre de courbure. Si s est birégulier, $C(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{n}(s)$.
- Cercle de courbure. Si s est birégulier, $\mathcal{C}(C(s), 1/k(s))$.

Mq. si s est birégulier, alors $\vec{t}(s)$ et $\vec{n}(s)$ sont orthogonaux.

Mq. le cercle de courbure en s_0 est tangent au support de γ à l'ordre 2 en s_0 (on pourra écrire les DL de γ et d'une paramétrisation de $\mathcal{C}(C(s_0), 1/k(s_0))$ par la longueur d'arc à l'ordre 2 en s_0).

Mq. si γ est de classe $\mathcal{C}^3$, birégulière, et si $k'(s_0) \neq 0$, alors le support de γ traverse le cercle osculateur en s_0 (faire un DL à l'ordre 3 de γ dans la base $(\gamma(s_0), \vec{t}(s_0), \vec{n}(s_0))$ puis de la fonction $\|\gamma\|^2$ en s_0).

Repère de Frenet en dimension 2

Si γ est une courbe plane paramétrée par la longueur de l'arc, alors pour tout $s \in I$ t.q. s est birégulier, $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^2$.
Le repère $(\gamma(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s))$ est appelé *repère de Frenet* de γ en s.

- **Formules de Frenet.** Pour tout $s \in I$, on a :

$$\frac{d\vec{t}}{ds}(s) = k(s)\vec{n}(s), \qquad \frac{d\vec{n}}{ds}(s) = -k(s)\vec{t}(s).$$

Montrer les formules de Frenet en utilisant les conditions :

$$\forall s \in I,\ \|\vec{n}(s)\| = 1,\ \vec{t}(s) \perp \vec{n}(s).$$

- **Normale algébrique.** Pour tout $s \in I$, $\vec{n}_{alg}(s) = Rot_{+\frac{\pi}{2}}(\vec{t}(s))$.

- **Courbure algébrique.** Pour tout $s \in I$, $\frac{d\vec{t}}{ds}(s) = k_{alg}\vec{n}_{alg}(s)$.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe rég. (non néc. paramétrée par longueur d'arc). Alors :

$$\forall t \in I,\ k_{alg}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Que dire d'1 courbe plane régulière de classe $\mathcal{C}^2$ à courbure constante ?
(Re-paramétriser par abs. curv. et montrer que le centre de courbure est constant.)

Formules de Frenet en dimension 3

Soit γ est une courbe gauche (i.e. non plane), de classe $\mathcal{C}^3$, paramétrée par la longueur de l'arc. En un point birégulier, la famille $(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s))$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$ pour tout s.

On note $\vec{b} := \vec{t} \wedge \vec{n}$ la binormale de γ.

Le repère $(\gamma(s), \vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ est appelé *repère de Frenet* de γ.

- Formules de Frenet. Pour tout $s \in I$, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d\vec{t}}{ds}(s) & = & k(s)\vec{n}(s), \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds}(s) & = & -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s), \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds}(s) & = & -\tau(s)\vec{n}(s). \end{array}\right.$$

Le réel k est appelé courbure de γ, le réel τ est appelé torsion de γ.

Vérifier les formules de Frenet en utilisant les conditions :

$$\|\vec{n}\| = \|\vec{t} \wedge \vec{n}\| = 1, \ < \vec{t}, \vec{n} >=< \vec{t}, \vec{b} >=< \vec{n}, \vec{b} >= 0.$$

Calculs de la courbure et de la torsion des courbes gauches

Soit γ est une courbe géométrique régulière, de classe $\mathcal{C}^3$ de paramétrisation (quelconque) $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.

- La courbure de γ est donnée par :

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3,}$$

- La torsion de γ est donnée par :

$$\tau(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Quelques références

- “Capes - Cours de géométrie” de Vincent Borrelli
  http://math.univ-lyon1.fr/ borrelli/Enseignement.html
- Cours “Courbes planes” de Thierry Gallouet
  https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/analyse/td01/chap6.pdf
- “Géométrie pour le Capes et l’Agrégation” de Guy Laville
- Cours de Géométrie d’Ana Rechtman
  http://irma.math.unistra.fr/ rechtman/Documents/cours.pdf
- Cours “Courbes et surfaces” de Boris Thibert
  https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/cs.pdf