Université Grenoble Alpes **Année 2020-2021**

Agrégation interne de Mathématiques

Analyse - Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions. Convergence simple - Convergence uniforme

Exercice 1

1. Donner un exemple d'une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement sur I mais ne convergeant pas uniformément sur I.
2. Une suite de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge-t-elle uniformément sur $\overline{I}$?
3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. A-t-on : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$?
4. Qu'en est-il si on remplace le segment $[a, b]$ par un intervalle non borné de $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Etudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = x^n,\ x \in [0, 1[$,
2. $f_n(x) = n^2xe^{-nx},\ x \in [0, +\infty[$,
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2 + n)},\ x \in \mathbb{R}$,
4. $f_n(x) = xe^{x/n},\ x\ \in [0, +\infty[$,
5. $f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{xsin(x)}$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, et $f_n(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$,
6. $f_n(x) = e^{-n|x|} \sin(nx),\ x \in \mathbb{R}$,
7. $f_n(x) = e^{-n|x|} \cos(nx),\ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction dont la dérivée f' est uniformément continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Montrer que la suite de fonctions de terme général $n[f(x+\frac{2}{n}) - f(x+\frac{1}{n})]$, $n \geq 1$, converge uniformément vers f' sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4 Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonctions définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0,\ f_n(x) = \min\left(n, 1/\sqrt{x}\right).$$

Exercice 5

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g, respectivement, sur A, alors $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg sur A.
2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers f et g, respectivement, uniformément sur A, et que f et g sont bornées sur A, alors $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg uniformément sur A.
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f : E \to \mathbb{C}^*$ uniformément sur A, et que la fonction $1/f$ est bornée sur A, alors la suite $(1/f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/f$ uniformément sur A.

Exercice 6 Critère de Cauchy uniforme

Définition. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble, soit (f_n) une suite de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On dit que (f_n) est uniformément de Cauchy sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 / \ \forall n \geq N, \forall m \geq N, \ \sup_A |f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Démontrer le critère de Cauchy uniforme : La suite (f_n) est uniformément de Cauchy sur A si et seulement si il existe $f : A \to \mathbb{C}$ telle que la suite (f_n) converge vers f uniformément sur A.

Exercice 7 Polynômes de Bernstein - Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit f une fonction consinue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Calculer $B_n(f)$ avec
   a) pour tout $x \in [0,1]$, $\ f(x) = 1$,
   b) pour tout $x \in [0,1]$, $\ f(x) = x$,
   c) pour tout $x \in [0,1]$, $\ f(x) = x(x-1)$.
   a) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1], \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$
   b) En déduire l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1], \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, $\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
   c) Montrer que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$.
3. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : *Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[a,b]$.*

Exercice 8

1. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la convergence des polynômes P_n définis par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$?

Exercice 9 Soit (f_n) une suite de fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- La suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g,
- $\exists\, x_0 \in I, \ \exists\, c \in \mathbb{R} / \ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f définie par

$$\forall x \in I, \ f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

2. Que peut-on dire de la régularité de la fonction f ?

2. Espaces de Banach

Rappel : pour montrer qu'un espace est de Banach, on peut considérer une suite de Cauchy d'éléments de l'espace, construire sa limite éventuelle, vérifier que cette limite appartient à l'espace, puis que la suite de Cauchy converge vers cette limite éventuelle.

Exercice 10 Soit X un ensemble et $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'espace $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 11 On note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. L'espace $\big(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ est-il complet ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver une norme sur $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ qui en fasse un espace complet.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires : $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Montrer que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

3. Séries de fonctions. Convergences simple et uniforme - Convergence normale.

Exercice 13 On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. La série $\sum f_n$ converge-t-elle absolument sur $]0,+\infty[$?
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$? Enoncer le théorème utilisé.
4. Existe-t-il $n_0 \geq 0$ et $a > 0$ tels que la série de fonctions f_n, définie pour $n \geq n_0$, converge normalement sur $[a,+\infty[$?
5. Montrer que la fonction $f : x \in]0,+\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Enoncer le théorème utilisé.
6. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Enoncer le théorème utilisé.

Exercice 14 Démontrer la règle d'Abel uniforme : Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un ensemble E et vérifiant :

1. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 0,\ \forall x \in E,\ |\sum_{k=0}^n g_k(x)| \leq M$,
2. La série $\sum |f_n - f_{n+1}|$ converge uniformément sur E,
3. La suite (f_n) converge vers 0 uniformément sur E.

Alors la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur E.

Exercice 15

1. Rappeler le théorème d'intégration pour les séries de fonctions convergeant uniformément.
2. Démontrer l'identité :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x.$$
3. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2)$ (on pourra considérer pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \in [0, 1/2] \mapsto x^n$).

4. Séries entières : rayon de convergence, fonctions DSE

Exercice 16 Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière (à coefficients complexes comme toujours).

1. Rappeler la définition de son rayon de convergence r.
2. Montrer que si $|z| < r$, alors $S(z)$ converge, et que si $|z| > r$, alors $S(z)$ diverge.
3. Soit r' un réel positif tel que $S(z)$ converge si $|z| < r'$ et $S(z)$ diverge si $|z| > r'$. Montrer que $r' = r$.

Exercice 17 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r.

1. Montrer que si $|z| < r$, alors $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée.
2. Montrer que si $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée, alors $|z| \leq r$.
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r. Soit r' un réel positif tel que $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée si $|z| < r'$, et non-bornée si $|z| > r'$. Montrer que $r' = r$.

Exercice 18 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence fini $r > 0$ et si $S(x)$ note sa somme, alors soit $\lim_{x \to r^-} f(x)$ existe, $\lim_{x \to r^+} f(x)$ existe.

Exercice 19

1. Démontrer le Lemme d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. En particulier, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0, r')}$ pour tout $0 < r' < r$.
2. Que peut-on dire pour $|z| = r$?

Exercice 20 Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence $r > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

Exercice 21 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r.

1. Soit k un entier strictement positif. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{kn}$ est égal à $\sqrt[k]{r}$.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum \dfrac{z^{5n}}{2^n}$ et $\sum \dfrac{z^{7n}}{(n^2+1)3^n}$.

Exercice 22 Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, mais n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$. On énoncera le théorème utilisé.

Exercice 23

1. En utilisant l'identité $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout x réel, obtenir le développement de $arctan$ en série entière. On précisera son rayon de convergence.
2. Utiliser le théorème d'Abel pour montrer la formule de Leibniz :
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Exercice 24 Si $n \geq 1$, soit I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$. On convient que $I_0 = 1$.

1. Montrer que, si $n \geq 2$, alors $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.
2. Montrer que la série entière $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ converge si $x \in]-1,1[$. On note $S(x)$ sa somme.
3. Montrer, pour $x \in]-1,1[$, que $S'(x) = (1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$ puis une expression de I_n.

Exercice 25 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{a^n}{1+b^n} z^n$ suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 26 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières réelles $\sum a_n x^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]-R;R[$: $a_n = n$; $a_n = n(n-1)$; $a_n = n^2$; $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$; $a_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

Pour chacune des séries précédentes, préciser le type de convergence (simple, uniforme, normale).

Exercice 27 Calculer le rayon de convergence R de la série $\sum \dfrac{n!}{(n+1)\ldots(2n+1)} z^n$. On précisera la méthode utilisée.

Etudier la convergence des séries numériques $\sum \dfrac{n!}{(n+1)\ldots(2n+1)} R^n$ et $\sum \dfrac{n!}{(n+1)\ldots(2n+1)} (-R)^n$.

Exercice 28 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note, pour $|z| < R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que pour tout $0 \leq r < R$ l'application $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(re^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = a_n r^n.$$
2. Démontrer le **Théorème de Liouville :** Soit f une fonction DSE sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $a, b, c > 0$ tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| \leq a\,|z|^b + c.$$
Montrer que f est un polynôme.

Exercice 29 Soit $R > 0$. *On dit qu'une fonction* $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ *est développable en série entière en 0 de rayon de convergence R (et on dit f est DSE(R)) s'il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R' \geq R$ *tel que* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *pour tout* $|x| < R$.

1. a) Soit f une fonction définie sur $]-R, R[$. Montrer que f est DSE(R) si et seulement si

$$\begin{cases} \text{f est de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \text{et} \\ \forall x \in]-R, R[, \ \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0. \end{cases}$$

   b) Exprimer alors les coefficients du développement en série entière de f.
2. Donner un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il n'existe pas $R > 0$ tel que $f \in DSE(R)$.
3. a) Rappeler la définition de la fonction exp comme solution d'une équation différentielle et montrer que exp est DSE(R) pour tout $R > 0$.

   b) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}, \ \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 30 Montrer que l'équation différentielle $xy' + (1-2x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de zéro. Déterminer le rayon de convergence de la série.

Exercice 31 Développement en série entière de la fonction tangente.

On pose, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f(x) = \tan x$.

1. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifier par la fonction f.
2. En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de Mac-Laurin de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\pi/2$.
4. On note $a_n, \ n \in \mathbb{N}$, les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

5. En déduire que, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f(x) = g(x)$, et déterminer la valeur de R. (On pourra trouver une relation reliant g' et g.)
6. En exprimant la fonction tanh à l'aide de la fonction tan, vérifier que la fonction tanh est développable en série entière. Préciser le rayon de convergence de la série entière associée.

Exercice 32 Calculer, suivant les valeurs du paramètre réel t, le développement en série entière en zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}.$$

On distinguera les cas $|t| < 1$ (poser alors $\theta = \arccos t$) , $|t| = 1$ et $|t| > 1$ (poser alors $\theta = Argch(t)$ avec $\theta > 0$ pour $t > 1$).

Exercice 33 Soit f la fonction définie par $\arctan\left(\dfrac{x \sin a}{1 - x \cos a}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $Def(f)$ de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $Def(f)$.
2. Montrer que la fonction f' vérifie
$$\forall x \in Def(f),\ f'(x) = \frac{\sin a}{x^2 - 2x\cos a + 1}.$$
3. En déduire : $\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)a)x^n$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).
4. En déduire le développement en série entière en 0 de la fonction f.

Exercice 34 On considère le système différentiel
$$x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$$
Est-il possible de trouver une solution développable en série entière ayant rayon de convergence strictement positif ?

5. Séries de Fourier.

Rappel des résultats principaux. On considère une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

• Coefficients de Fourier de f :
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

• Egalité de Parseval : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$

• Théorème de Dirichlet. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

• Théorème de Fejer. On suppose f continue sur $\mathbb{R}$. On note $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f, et $\sigma_n(f)$ la n-ième moyenne de Césaro de ces sommes partielles :
$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}.$$
Alors $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 35
1. Quel est le sens du théorème de Fejer ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π-périodique et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   S'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = l$, alors $l = f(x_0)$.
3. Que peut-on dire de la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?

Exercice 36 En considérant la fonction f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = -1$ si $-\pi \le x \le 0$ et $f(x) = 1$ si $0 < x \le \pi$, montrer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 37 Calculer la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x) = \pi - |x|$ pour tout $x \in -]\pi, \pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 38 On considère la fonction f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Etudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 39 Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - x^2$ si $x \in]0, \pi[$.
Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et de g.
2. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.