Agrégation interne 2005, épreuve 2

1 Énoncé

Notations et objectifs du problème

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, par $\boldsymbol{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ formé des suites bornées et par $\boldsymbol{E}_c$ le sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).

Si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément $\boldsymbol{E}$, on pose $\|x\| = \sup\{|x_k| \mid k \geq 0\}$; on admet que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\boldsymbol{E}$ et que $\boldsymbol{E}$ est complet pour cette norme.

On note $\mathcal{F}$ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associe $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $y_k = \dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{j=0}^{k} x_j$. Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

1. Montrer que $\boldsymbol{E}$ est stable par $\mathcal{F}$. On note T la restriction de $\mathcal{F}$ à $\boldsymbol{E}$.
2. Vérifier que T est une application linéaire continue.
3. Montrer que $\boldsymbol{E}_c$ est stable par T et plus précisément que si x converge vers ℓ, il en est de même pour $y = T(x)$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T. Il est constitué de trois parties indépendantes.

La partie **I** permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.

Dans la partie **II** on détermine le noyau, l'image et le spectre de T.

La partie **III** est consacrée à l'aspect régularisant de T. On y établit que :

1. Si x est une suite bornée, $(T^n(x))_{n\geq 0}$ converge simplement vers une suite constante.
2. L'ensemble des suites x de $\boldsymbol{E}$ telles que, pour tout n, $T^n(x)$ soit une suite divergente, est dense dans $\boldsymbol{E}$.
3. Si Ω est l'ensembles des suites à termes dans $[0,1]$, on définit la probabilité de Kolmogoroff $\mathbb{P}$ sur Ω et on démontrer que :
   (a) $\mathbb{P}(x \in \Omega \text{ et } x \text{ converge}) = 0$.
   (b) $\mathbb{P}(x \in \Omega \text{ et } T(x) \text{ converge}) = 1$.

– I – Exemples

– A – Premiers exemples

1. Soit θ dans $]0, 2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = T(x)$. Démontrer que y appartient à $\boldsymbol{E}_c$.

2. Soit n un entier ≥ 1 ; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On pose $y = T(x)$.

   (a) Calculer y_{pn+j} pour $p \geq 0$ et $0 \leq j \leq n$.

   (b) En déduire que y appartient à $\boldsymbol{E}_c$.

3. Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?

4. Soit t dans $[0,1]$. On définit $x(t)$par

$$\begin{cases} x_0(t) = t \\ x_{k+1}(t) = (x_k(t) - 1)^2 \text{ pour } k \geq 0 \end{cases}$$

   Il est facile de voir que pour tout t dans $[0,1]$, la suite $x(t)$ est à valeurs dans $[0,1]$.
   On pose alors $y(t) = T(x(t))$.
   Soit t_0 le nombre $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (il vaut 0.38 à 10^{-2} près).

   (a) On se propose de démontrer que, lorsque $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ est divergente.

      i. On suppose la suite $x(t)$ convergente. Trouver la limite ℓ de $x(t)$.

      ii. Vérifier que si $t \neq t_0$, alors pour tout entier k, $x_k(t) \neq \ell$. Si, dans ces conditions, la suite $x(t)$ était convergente, quelle serait la limite (quand k tend vers l'infini) du rapport $\dfrac{x_{k+1}(t) - \ell}{x_k(t) - \ell}$?

      iii. Conclure.

   (b) On définit f et g fonctions de $[0,1]$ dans lui même par $f(x) = (x-1)^2$ et $g = f \circ f$.

      i. Dessiner le graphe de g en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la première bissectrice et ses points d'intersection avec cette droite.

      ii. *Pour cette question, on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.*
      Montrer que les suites extraites $(x_{2k}(t))_{k\geq 0}$ et $(x_{2k+1}(t))_{k\geq 0}$ sont convergentes.
      En déduire que $y(t)$ est convergente et identifier sa limite en fonction de t.

      iii. On rappelle que $y(t) = (y_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$. La suite de fonctions $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

– B – Une remarque

Soit x dans $\boldsymbol{E}$ et $y = T(x)$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $|y_k - y_{k-1}| \leq \dfrac{2\|x\|}{k+1}$.

2. En déduire que si x est une suite à valeurs réelles alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de y est un intervalle.

– C – Suites à valeurs dans $\{0,1\}$

Pour tout entier $p \geq 1$, on pose $u_p = 1! + 2! + 3! + \cdots + p!$ et
$v_p = 1! + 3! + 5! + \cdots + (2p-1)!$
De plus $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

1. Montrer que $u_p \underset{+\infty}{\backsim} p!$ (on pourra mettre $p!$ en facteur). Montrer de même que $v_p \underset{+\infty}{\backsim} (2p-1)!$
   On définit une suite x de la manière suivante :
   si $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique $j(k) \geq 0$ tel que $u_{j(k)} \leq k < u_{j(k)+1}$ et dans ce cas, si $j(k)$ est pair on pose $x_k = 1$, si $j(k)$ est impair on pose $x_k = 0$.
   Autrement dit
   $$x = 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, (24 \text{ fois}), 1, 1, 1, (120 \text{ fois}), \cdots$$
2. On pose $y = T(x)$. Calculer y_k pour $k = u_p$.
3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de y est égal à $[0,1]$.
   Quel est celui de la suite x ?
4. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes de paramètre $\dfrac{1}{2}$
   $(\forall k \geq 0,\ \mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{2})$.
   (a) Calculer, pour $k \geq 0$ et $p \geq 0$, $\mathbb{P}(X_k = X_{k+1} = \cdots = X_{k+p} = 0)$, puis $\mathbb{P}(\forall j \geq k,\ X_j = 0)$.
   (b) En déduire que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge presque sûrement.
   (c) On appelle Y la suite $T(X)$ où X est la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer, en utilisant un théorème du cours, que la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

– II – Étude de l'endomorphisme T

– A – Généralités

1. Montrer que l'application $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui-même.
2. On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble $\left\{ \dfrac{1}{k+1} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$. Soit λ un nombre complexe. On note $I_{\mathcal{E}}$ l'application identique de $\mathcal{E}$ sur lui-même.
   (a) Montrer que si λ n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{A}$, alors l'application linéaire $\mathcal{F} - \lambda I_{\mathcal{E}}$ est bijective.
   (b) Montrer que si λ appartient pas à l'ensemble $\mathcal{A}$, alors l'application linéaire $\mathcal{F} - \lambda I_{\mathcal{E}}$ n'est ni injective ni surjective.
3. Soit $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\boldsymbol{E}$. Montrer que :
   $$y \in \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \exists K > 0 \text{ tel que, } \forall k \geq 1,\ |(k+1)\,y_k - k y_{k-1}| \leq K.$$
4. L'application linéaire T de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{E}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

– B – Quelques suites auxiliaires

Dans ce **B.** on considère un nombre complexe λ vérifiant les hypothèses suivante :

$$\lambda \neq 0,\ \lambda \notin \mathcal{A},\ \Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) \neq 1. \qquad ((L))$$

$\Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) \neq 1$, on a $\lambda \neq 1$ et α_0 est bien défini.

On écrit $1 - \frac{1}{\lambda} = a + ib$ avec a et b réel ($a \neq 0$). On définit la suite α par :

$$\alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda} \text{ et, pour } k \geq 1,\ \alpha_k = \frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}}\alpha_{k-1}. \qquad ((*))$$

Cette suite est bien définie grâce aux hypothèses (L).

1. Vérifier que $\alpha_k \neq 0$ pour tout entier positif k.
2. Montrer que $\ln(|\alpha_k|) - \ln(|\alpha_{k-1}|) = -\frac{a}{k} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
3. Que dire de la suite $|\alpha|$ si a est négatif ?
4. On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que l'on ait $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Pour a positif, montrer qu'il existe un nombre réel A_1 strictement positif tel que $|\alpha_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{A_1}{k^a}$.

   (A_1 et les nombres $A_2, \cdots, A_5$ qui suivent dépendent de λ mais sont indépendants de k).
5. On définit $U_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j\,|\alpha_{j-1}|}$ et $V_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left|\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right|$.

   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel A_2 strictement positif tel que

   $$\forall k \geq 1,\ 0 \leq U_k \leq A_2 k^a.$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante A_3 telle que $\forall k \geq 1,\ |\alpha_k U_k| \leq A_3$.
6. En exprimant $\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}$ grâce à $(*)$ montrer qu'il existe une constante A_4 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geq 1,\ |\alpha_k|\, V_k \leq A_4.$$

– C – Détermination du spectre de T

Définitions.

Soit S un endomorphisme continu de $\boldsymbol{E}$, on dit que S est inversible si S réalise une bijection de $\boldsymbol{E}$ sur lui même.

Remarque : $\boldsymbol{E}$ étant complet, il résulte d'un théorème de Banach que si S est bijectif et continu, alors S^{-1} est continu, de sorte que S est alors un élément inversible de l'algèbre des endomorphismes continus de $\boldsymbol{E}$.

On appelle spectre de S, et on note $\sigma(S)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $S - \lambda I_{\boldsymbol{E}}$ n'est pas inversible.

On admettra que $\sigma(S)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.

1. Est-ce que 0 est dans $\sigma(T)$? Même question pour 1.

   Dorénavant, on se donne un complexe λ vérifiant les hypothèses (L) du **II.B**. On garde les notations $\alpha, U, V, \cdots$ du **II.B**.

2. Soient x, y deux éléments de $\mathcal{E}$. Vérifier que :

$$(T-\lambda I_{\boldsymbol{E}})(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{1-\lambda} y_0, \\ \forall k \geq 1,\ x_k = \frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{k}} \left(x_{k-1} + \frac{1}{\lambda}\left(y_{k-1} - y_k - \frac{1}{k} y_k\right)\right). \end{cases} \qquad ((**))$$

3. On considère $y = \left(\dfrac{1}{k+1}\right)_{k\geq 0}$. On considère la suite x (a priori dans $\mathcal{E}$) telle que $(T-\lambda I_{\boldsymbol{E}})(x) = y$.
   (a) Quel est le lien entre x et la suite α du **II.B**.
   (b) En utilisant **II.B.** montrer que si, $\Re\left(1-\dfrac{1}{\lambda}\right) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$.

4. On suppose que $\Re\left(1-\dfrac{1}{\lambda}\right) > 0$.

   Soit y est dans $\boldsymbol{E}$ et soit x la suite définie par les formules $(**)$ ci-dessus.
   (a) Établir les relations suivantes :

$$\forall k \geq 1,\ \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda}\frac{y_{k-1}-y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda}\frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}$$

$$\forall k \geq 1,\ x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_{j-1}-y_j}{\alpha_{j-1}} - \frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{j\alpha_{j-1}}.$$

   (b) En remarquant que :

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{y_{j-1}-y_j}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} y_j\left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k},$$

   montrer qu'il existe une constante A_5 (indépendante de y et de k) telle que :

$$\forall k \geq 0,\ |x_k| \leq A_5 \|y\|.$$

5. Déterminer $\sigma(T)$ et le représenter sur un dessin.

– III – Propriétés régularisantes de T

Notations et terminologie

1. On sera amené à considérer des suites de suites (ou plus généralement des familles de suites).

   Si I est un ensemble d'indices le symbole $\left(\left(x_k^{(i)}\right)_{k\geq 0}\right)_{i\in I}$ désigne la famille $x^{(i)}$ indexée par I, $x_k^{(i)}$ est le terme d'indice k de la suite $x^{(i)}$.

Par exemple considérer $\left(\left(\dfrac{1}{(k+1)^n}\right)_{k\geq 0}\right)_{n\geq 0}$, c'est considérer les suites :
$x^{(0)} = (1,1,1,1,1,\cdots)$
$x^{(1)} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots\right)$
$x^{(2)} = \left(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \cdots\right)$
$x^{(3)} = \left(1, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{125}, \cdots\right)$ etc.
Dans l'énoncé, k désignera presque toujours l'indice des suites de complexes et n sera réservé à l'indexation des suites de suites.

2. Limites :
A priori, le mot suite, sans indication contraire, désigne un élément de $\mathcal{E}$; aussi, lorsque l'on dit que la suite $\left(x_k^{(n)}\right)_{k\geq 0}$ converge on veut dire que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(n)}$ existe dans $\mathbb{C}$. Si on veut exprimer l'idée qu'il existe dans $\boldsymbol{E}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\| = 0$, on dira que la suite $\left(x^{(n)}\right)$ d'éléments de $\boldsymbol{E}$ converge dans $\boldsymbol{E}$ vers x.
Les expressions utilisées seront suffisamment détaillées pour éviter toute ambiguïté.

– A – Convergence simple

Définition. Soient $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 0} = \left(\left(x_k^{(n)}\right)_{k\geq 0}\right)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\boldsymbol{E}$ et u dans $\boldsymbol{E}$. On dit que $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $u = (u_k)_{k\geq 0}$ si pour tout $k \geq 0$, $\left(x_k^{(n)}\right)_{k\geq 0}$ tend vers u_k quand n tend vers l'infini.

1. Exceptionnellement, dans cette question et la suivante, les suites de nombres complexes sont indexées par n pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement.
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers ℓ dans $\mathbb{C}$.
Soit α un nombre complexe tel que $|\alpha| < 1$, on pose $u_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha^j a_{n-j}$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.
2. Soient v et w deux suites de nombres complexes telles que, pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = \alpha v_n + w_n$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.
Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.
3. Soit x une suite de nombres complexes. On pose $a = x_0$ et $b = x_1$. On considère la suite $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\boldsymbol{E}$ définie par $x^{(n)} = T^n(x)$, en convenant que $x^{(0)} = x$.
   (a) Calculer $x_0^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_0^{(n)}$?
   (b) Calculer $x_1^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_1^{(n)}$?
   (c) Montrer que :
$$\forall k, n \geq 0,\ x_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{k+2} x_{k+1}^{(n)} + \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k} x_j^{(n)}.$$

(d) Montrer que $x^{(n)}$ converge simplement vers la suite constante égale à a.

4. Monter que, si $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge dans $\boldsymbol{E}$, alors sa limite est la suite constante égale à a.
5. On suppose que $a = 0$ et que la suite (x_k) a une limite $c \neq 0$ dans $\mathbb{C}$.
   Montrer que $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 0}$ diverge dans $\boldsymbol{E}$.

– B – Lissage : un résultat négatif

Pour n entier fixé, on note $\boldsymbol{E}_n = \{x \in \boldsymbol{E} \text{ telles que } T^n(x) \text{ converge dans } \mathbb{C}\}$. $\boldsymbol{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On admet le théorème suivant :

Soit $\boldsymbol{F}$ un espace de Banach. Si pour $n \geq 0$, $\boldsymbol{F}_n$ est un sous-ensemble de $\boldsymbol{F}$ fermé et d'intérieur vide, alors la réunion de tous les $\boldsymbol{F}_n$ est aussi d'intérieur vide.

1. Soit $\boldsymbol{F}$ un espace vectoriel normé et G un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{F}$ d'intérieur non vide. Ainsi G contient une boule ouverte de $\boldsymbol{F}$, de centre x_0 et de rayon ε strictement positif.
   En utilisant la structure d'espace vectoriel, montrer successivement que :
   (a) G contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε,
   (b) $\boldsymbol{F} = G$.
2. On admet provisoirement que $\boldsymbol{E}_n \neq \boldsymbol{E}$ pour tout $n \geq 0$.
   (a) Montrer que $\boldsymbol{E}_c$ est un sous-espace fermé de $\boldsymbol{E}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des x de $\boldsymbol{E}$ tels que, pour tout $n \geq 0$, la suite $T^n(x)$ ne soit pas convergente dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\boldsymbol{E}$.
3. On prouve dans cette question ce qui est admis à la question précédente.
   (a) Soient t_0 un nombre réel positif et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   Pour $n \geq 0$, on note (H_n) l'hypothèse :
   $$\exists t_1 \geq t_0 \mid \forall j \leq n,\ \exists M_j \mid \forall t > t_1,\ \left|f^{(j)}(t)\right| \leq \frac{M_j}{t^j} \qquad ((H_n))$$
   avec $f^{(0)} = f$.
   Pour $t \geq t_0 + 1$, on pose $g(t) = (t+1)f(t) - tf(t-1)$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0 + 1, +\infty[$.
   On suppose (H_n) vérifiée pour la fonction f et un entier $n \geq 1$.
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que g vérifie (H_{n-1}).
   (b) Soit n un entier ≥ 1 et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, satisfaisant l'hypothèse (H_n) avec $t_0 = 0$. Pour tout entier $k \geq 0$, on pose $y_k = f(k)$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe x dans $\boldsymbol{E}$ tel que $y = T^n(x)$.
   (c) On pose $y = (\exp(i \ln(k+1)))_{k\geq 0}$.
      i. Montrer que y est dans $\operatorname{Im}(T^n)$ pour tout $n \geq 0$.
      ii. En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $\boldsymbol{E}_n$ est différent de $\boldsymbol{E}$.

– C – Aspect probabiliste

On note Ω l'ensemble des suites de nombres réels appartenant à $[0,1]$.

Étant donnés un entier naturel n et deux suites finies de nombres réels $a=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ et $b=(b_0,b_1,\cdots,b_n)$ vérifiant pour tout j les inégalités $0\leq a_j\leq b_j\leq 1$, on désigne par $K_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \forall j,\ a_j\leq x_j\leq b_j\}$.

Le volume de $K_{a,b}$ est par définition le réel $\nu(K_{a,b})=\prod\limits_{j=0}^{n}(b_j-a_j)$.

On associe à K la partie Ω_K de Ω définie par :

$$\Omega_K=\left\{x=(x_k)_{k\geq 0}\mid (x_0,x_1,\cdots,x_n)\in K\right\}.$$

On admettra qu'il existe sur Ω une tribu contenant tous les Ω_K et sur cette tribu $\mathcal{B}$ une probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\Omega_K)=\nu(K)$ pour tout pavé K.

On définit enfin, pour k entier naturel, la variable aléatoire X_k, application de Ω dans $\mathbb{R}$, qui à $x=(x_i)_{i\geq 0}$ associe $X_k(x)=x_k$.

1. Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et identifier cette loi.
2. Soit ε un nombre réel tel que $0<\varepsilon<1$.
   Calculer, pour $n\geq 0$ et $p\geq 1$:
   $$\mathbb{P}\left(\{\omega\in\Omega\mid |X_j(\omega)-X_n(\omega)|<\varepsilon \text{ pour } n+1\leq j\leq n+p\}\right).$$
3. En déduire que x diverge presque sûrement (on pourra admettre que l'ensemble $\{x\in\Omega\mid x \text{ converge}\}$ est dans la tribu $\mathcal{B}$).
4. En utilisant un théorème du programme, montrer que $T(x)$ converge presque sûrement.