Dénombrement

Préparation à l'agrégation interne

Année 18/19

Exercice 1. Soit E un ensemble à n éléments. Quel est le nombre de couples (A, B) formés de parties de E telles que $A \subset B$?
Quel est le nombre de couples (A, B) formés de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$?

Exercice 2. Soit E un ensemble à n éléments.
L'ensemble des sous ensembles de E ayant k éléments est noté $\mathcal{P}_k(E)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et X l'ensemble des k-uplets d'éléments de E ne comportant aucun élément identique ie l'ensemble des arrangements de k éléments de E sans répétition. Soit f l'application de X dans $\mathcal{P}_k(E)$ définie par :

$$f((x_1, \cdots, x_k)) = \{x_1, \cdots, x_k\}$$

En utilisant le principe de division, déterminer le cardinal de $\mathcal{P}_k(E)$.

Exercice 3. Formule du crible ou d'inclusion-exclusion Soit E un ensemble. Si A est une partie de E, la *fonction indicatrice* de A est la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ valant 1 sur A et 0 sur A^c.
Montrer les propriétés :
a) Si E est fini, $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x) = |A|$.
b) $\mathbb{1}_E = 1$ (cte) ; $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ (cte).
c)$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$.
d) Si $A \subset B$ alors $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.
e)Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E on a $\mathbb{1}_{A_1 \cap \cdots \cap A_n} = \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n}$.
f) Dans le cas général on a $\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}$.
(Indication : On utilisera c) et e) et le développement de $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$).
g) De a) en déduire, si E est fini, la formule de Poincaré :

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

Exercice 4. Une inégalité Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E on a $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \le |A_1| + \cdots + |A_n|$.

Exercice 5. Quel le cardinal de $\{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \le x_1 < \cdots < x_k \le n\}$ où $k \le n$?

Exercice 6. On note S_n^k le nombre d'applications *surjectives* d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ à k éléments.
a) Soient pour $i = 1, \ldots, k$ les ensembles d'applications $A_i = \{f : E \to F | y_i \notin f(E)\}$. Calculer $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$ grâce à la formule de Poincaré.
b) En déduire la formule

$$S_n^k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} l^n$$

Exercice 7. Montrer que $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
Que représente ce nombre ?

Exercice 8. Montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
(On dénombrera de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments d'un ensemble comportant n boules rouges et n boules noires. On parle de preuve par double dénombrement).
Plus géneralement, montrer que pour tout $l \leq m + n$,

$$\binom{n+m}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k}$$

On fait la convention que $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

Exercice 9. Que vaut $\displaystyle\sum_{\substack{(n_1, \cdots, n_k) \in \mathbb{N}^n \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1 \ \cdots \ n_k}$?

Un problème d'occupation

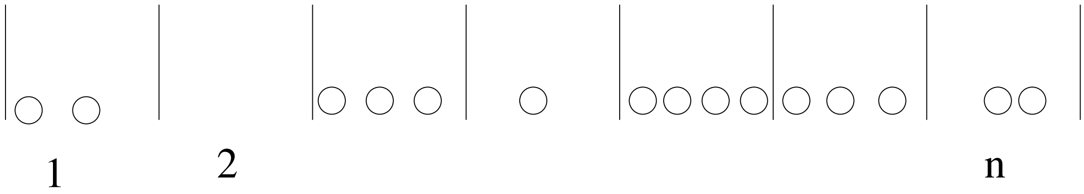
On dispose de n boites numérotées de 1 à n et de k balles indiscernables. On range les balles dans les boites et on se demande quelle est le nombre de façons possibles de le faire.
Notons pour $1 \leq i \leq n$, a_i le nombre de balles dans la boite i. On cherche donc le cardinal de $\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n / \ a_1 + \cdots + a_n = k\}$.

Théorème :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n / \ a_1 + \cdots + a_n = k\}| = \binom{n+k-1}{k}$$

Preuve : *Représentons un élément de l'ensemble précédent de la façon suivante :*



On a sur cet exemple $n = 7$ et $k = 15$.
Ainsi une répartition des k balles dans les n boites correspond à un unique mot de k "ronds" et $n - 1$ barres. (On enlève la cloison la plus à droite et la cloison la plus à gauche.)
Réciproquement un tel mot correspond à une répartition des k balles dans les n boites.
Par exemple le mot $OOOO|O||OOO|OO|OO|OOO$ correspond à la solution (4,1,0,3,2,2,3).
Un tel mot comporte $n + k - 1$ lettres. Une fois qu'on a choisi l'emplacement des k ronds, le mot est déterminé. Il y a donc $\binom{n+k-1}{k}$ solutions.

Exercice 10. Une autre démonstration pour le problème d'occupation

Soient n et k des entiers naturels. On note G_n^k le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ d'entiers naturels tels que $x_1 + \cdots + x_n = k$.
a) Déterminer G_n^0, G_n^1 et G_n^2 en fonction de n et G_2^k en fonction de k.
b) Démontrer que $G_{n+1}^{k+1} = G_{n+1}^k + G_n^{k+1}$. On pourra classer les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = k+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non.
c) En déduire que

$$G_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

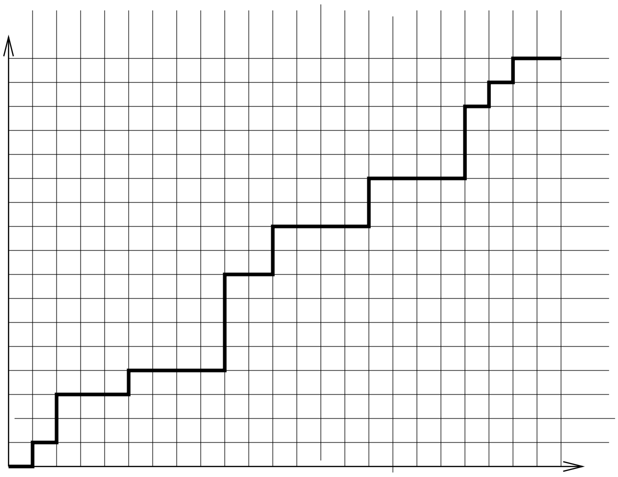
Exercice 11. Encore une autre démonstration pour le problème d'occupation
Notons $\mathcal{G}_n^k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 + \cdots + x_n = k\}$.
Notons $\mathcal{H}_n^k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = k\}$.
Notons $\mathcal{U}_n^k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n / x_1 < x_2 < \cdots < x_n = k+n-1\}$.
Montrer que les applications suivantes sont bijectives.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{H}_n^k \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n^k & \longrightarrow & \mathcal{U}_n^k \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_2 + 1, \cdots, x_n + n - 1) \end{array}$$

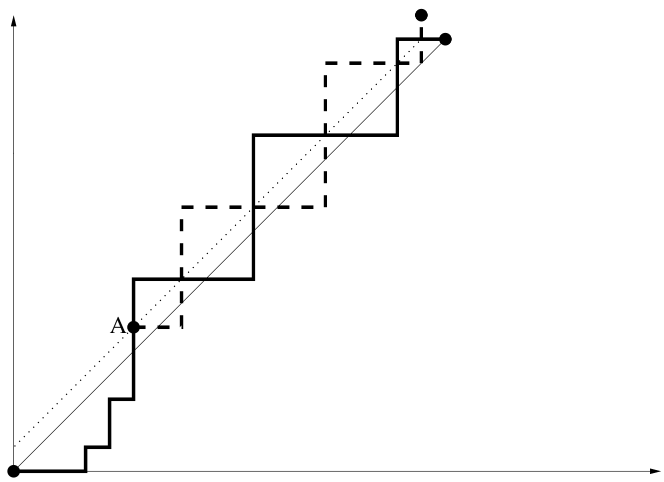
En déduire le résultat.

Exercice 12. Chemins et nombre de Catalan
On considère $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et le réseau passant par les points de coordonnées entidères .
On imagine une personne se déplaçant sur ce réseau seulement dans les directions Nord ou Est, c'est à dire que si la personne est au point de coordonnées (x, y), elle va soit en $(x+1, y)$ soit en $(x, y+1)$.



Voici un exemple de chemin de $(0,0)$ à $(23, 17)$.
Quel est le nombre de chemins pour aller de $(0,0)$ à (p,q) ?
On peut voir aussi cette représentation comme la modélisation de l'expérience suivante :
On jette une pièce de monnaie $p+q$ fois. A chaque lancer, on fait un déplacement horizontal si on obtient un pile et un déplacement vertical sinon.
Quel est le nombre de chemins pour aller de (a,b) à (p,q) où $0 \leq a \leq p$ et $0 \leq b \leq q$?
Quel est le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) qui reste en dessous de la diagonale ?

Supposons dans l'interprétation précédente que je gagne 1€ chaque fois que la pièce tombe sur pile et perde 1€ chaque fois qu'elle tombe sur face. La réponse à la question me donne le nombre de possibilités telles que partant avec 0€, ma fortune reste toujours positive.
Pour calculer ce nombre, on va d'abord utiliser le principe de soustraction. Ce nombre est égal au nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) moins le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,n) qui traversent la diagonale c'est à dire qui touche la droite d'équation $y = x + 1$.
Le premier est connu, il faut donc calculer le second. Représentons un tel chemin :



On considère le premier point où on a touché la droite d'équation $y = x + 1$. Soit A.
Ensuite on prend le symétrique du chemin qui va de A à (n,n) par rapport à la droite d'équation $y = x+1$. On obtient le chemin en pointillé. C'est donc un chemin qui va de $(0,0)$ à $(n-1, n+1)$.
Le reste de la trajectoire de $(0,0)$ à A est inchangé.
Grâce à cette symétrie, on a donc associé à notre chemin de $(0,0)$ à (n,n) qui touche la droite d'équation $y = x + 1$, un chemin de $(0,0)$ à $(n-1, n+1)$.
En déduire que le nombre cherché est :

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Ce nombre est appelé nombre de Catalan. Cette astuce de comptage fut trouvée par Désiré André en 1887 et est appelée principe de symétrie.

Exercice 13. Tour de magie
Deux magiciens disposent d'un jeu de 52 cartes. Un des deux quitte la salle. Les spectateurs tirent 5 cartes du paquet et les donnent au magicien présent. Celui retire une carte parmi les 5, classe les quatre restantes, appelle l'autre magicien et lui montre alors les 4 cartes classées. Le magicien donne alors la valeur de la cinquième carte.
Notons $\mathcal{A}_4$ l'ensemble des 4-uplets de cartes deux à deux distinctes et $\mathcal{P}_5$ l'ensemble des choix possibles des cinq cartes distinctes.

1. Donner les cardinaux de $\mathcal{A}_4$ et de $\mathcal{P}_5$.
2. Montrer que si le cardinal de $\mathcal{P}_5$ est plus petit que le cardinal de $\mathcal{A}_4$, il existe une méthode pour réaliser le tour de magie.
3. A l'aide des ingrédients suivants, fabriquer une méthode.
   — Parmi 5 cartes il y en a au moins deux de la même couleur.
   — Si $a, b \in \{1, \ldots, 13\}$ et $a \neq b$, alors soit $a \in \{b+1, b+2, b+3, b+4, b+5, b+6\}$, soit $b \in \{a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$ où les nombres sont pris modulo 13.

— Le nombre de façons de classer trois nombres distincts est ?.

4. Est-il possible de faire ce tour avec 4 cartes au lieu de 3 ?