**Préparation à l'agrégation interne** 2019-2020

**Exercices sur le thème : changements de base en algèbre linéaire et bilinéaire**

**Références utilisées pour la leçon 112**
SKANDALIS, *Algèbre générale et algèbre linéaire.*
GOURDON, *Math en tête - Algèbre.*
VAUTHIER, *Réforme LMD L1 et L2.*
FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS, *X-ENS, Algèbre 3.*
SOROSINA, *Système D.*

Pour le travail de fond :
PAUGAM, A., *Questions délicates en algèbre et géométrie.*
AUDIN, *Géométrie*

Livres classiques non retenus :
GRIFONE, *Algèbre linéaire.*
CAP Prepa, *Mathématiques MPMP*, 2e année*, Pearson.
J'intègre, *Math tout en un, MP, 2e année*, DUNOD.
HPrepa, *MPMP**, Hachette.

Dans cette feuille $\mathbb{K}$ désigne un corps et *can* désigne une base canonique (qui dépend de l'espace considéré).

**Exercice 1**
Montrer que $\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 \\ x'_2 = x_1 \end{cases}$ définit un "changement de coordonnées" dont on précisera le contexte en introduisant espace vectoriel, bases et matrices de changement de base.

**Exercice 2**
On considère l'application $q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \end{array}$

**1.** Montrer que $q$ est une forme quadratique définie positive.

**2.** Déterminer une base $q$-orthogonale de $\mathbb{R}^2$ :
- par la méthode de Gauss appliquée à cette somme de carré de formes linéaires indépendantes.
- par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $\underline{e}$.
- en développant l'expression de $q$ en coordonnées dans la base canonique et en appliquant l'algorithme de Gauss à cette expression.

**Exercice 3**
On considère les formes linéaires $\phi_1 : (x, y) \to x + 2y$, $\phi_2 : (x, y) \to -x + y$ sur $\mathbb{K}^2$.

Quelle lien y a-t-il entre la matrice définie en ligne par $\begin{pmatrix} \mathrm{mat}_{can}\phi_1 \\ \mathrm{mat}_{can}\phi_2 \end{pmatrix}$ et la matrice $mat_{can}(\phi_1, \phi_2)$ (préciser de quels espaces *can* désigne la base canonique dans ces écritures) ? Montrer que $(\phi_1, \phi_2)$ forment une base de $(\mathbb{K}^2)^*$.

**Exercice 4**
Les formes quadratiques $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont-elles non dégénérées ? Quel est leur rang, leur signature ? Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour $q$.

**1.** $q((x, y, z)) = (x + y)^2 - (x - z)^2$.

**2.** $q((x, y, z)) = (x + y)^2 + y^2 - 2z^2$.

**3.** $q((x, y, z)) = (x + y)^2 + y^2 + 2(x + y + z)^2$.

**4.** $q((x, y, z)) = (x + y)^2 + z^2 + 2(x + y + z)^2$.

**5.** $q((x, y, z)) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2$

**6.** $q((x, y, z)) = x^2 + (x + y + z)^2 + (y + z)^2 + 2z^2$.

**Exercice 5**

Déterminer le rang, la signature et une base orthogonale pour les formes quadratiques réelles suivantes.

**1.** $q((x,y,z)) = x^2 + 4xy - 8yz$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

**2.** $q((x,y,z)) = xz + y^2 + yz$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

**3.** $q((x,y,z)) = 2xy + 4yz$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

**4.** $q((x_1,x_2,x_3)) = 7x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$ pour $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

**5.** $q(P) = P(2)P(1) + P(1)P(0)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

**6.** $q(A) = \det(A)$ pour $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 6**

On considère l'application $q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y)^2 + (x-y+z)^2 + z^2 \end{array}$

**1.** Montrer que $q$ est une forme quadratique définie positive.

**2.** **a.** Déterminer une base $q$-orthogonale $\underline{u} = (u_1,u_2,u_3)$ par la méthode de Gauss.

**b.** Déterminer $q(au_1 + bu_2 + cu_3)$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}$ et la matrice de $q$ dans la base $\underline{u}$.

**c.** Exprimer la matrice de $q$ dans la base canonique $\underline{e} = (e_1,e_2,e_3)$ et vérifier par un calcul matriciel que $\underline{u}$ est $q$-orthogonale.

**3.** **a.** Déterminer une base $q$-orthogonale $\underline{e'} = (e'_1,e'_2,e'_3)$ par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $\underline{e}$.

**4.** Soit $F = \mathrm{vect}((1,0,0),(1,1,-1))$ et $p_F$ la projection $q$-orthogonale sur $F$. Déterminer $p_F((0,1,0))$.

**Exercice 7**

Dans les cas suivants, montrer que $b$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$, appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille libre $F$ pour obtenir une base orthonomée de $\mathrm{vect}(F)$ et calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\mathrm{vect}(F)$. En déduire la distance de $v$ à $F$.

**1.** $E = \mathbb{R}^3$, le produit scalaire usuel $b$, $F = ((1,0,-1),(1,-1,0))$ et $v = (1,1,1)$.

**2.** $E = \mathbb{R}_3[X]$, $b(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(X)Q(X)dX$, $F = (1,X,X^2)$, $v = X^3$.

**Exercice 8**

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour la forme bilinéaire symétrique $b$ suivante, dont on vérifiera que c'est un produit scalaire : $b(P,Q) = \sum_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$.

**Exercice 9**

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y - 1 = 0.$$

On lui associe les deux formes quadratiques sur les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ :

$$q : (x,y) \mapsto x^2 - 6xy + y^2,\ \ Q : (x,y,z) \mapsto x^2 - 6xy + y^2 + 6xz - 2yz - z^2,$$

et la forme linéaire $\phi : (x,y) \mapsto 6x - 2y$ sur $\mathbb{R}^2$.

**1.** Montrer que l'application $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $i(x,y) = (x,y,1)$ envoie bijectivement $\mathcal{C}$ sur l'intersection du cône isotrope de $Q$ et du plan d'équation $z = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

**2.** Orthogonaliser la forme quadratique $q$ à l'aide du procédé de Gauss. Quelle peut-être la nature de la conique $\mathcal{C}$ ?

**3.** Orthogonaliser la forme quadratique $Q$ à l'aide du procédé de Gauss et préciser la nature de la conique $\mathcal{C}$.

**4.** On munit désormais le plan affine $\mathbb{R}^2$ de la structure euclidienne induite par le produit scalaire usuel. Déterminer un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ dans lequel l'équation de la conique $\mathcal{C}$ est de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

(forme réduite de l'équation de la conique).

**5.** Reprendre l'exercice en considérant la conique $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0.$$

**Exercice 10**

Déterminer la nature et le groupe de symétrie des quadriques de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

**1.** $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz - 1 = 0$.

**2.** $-2x^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 + 4x - 8y + 4$.

**Exercice 11**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère la conique $\mathcal{C}_{a,b}$ d'équation :

$$x^2 - 2xy + ay^2 - 2x + y - b = 0.$$

**1.** Étudier la nature des coniques $\mathcal{C}_{a,b}$ pour $(a, b) = (0, 0)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, -2)$, $(2, -3)$.

**2.** En munissant $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne induite par le produit scalaire usuel, trouver la forme réduite de l'équation des coniques $\mathcal{C}_{a,b}$ pour $(a, b) = (0, 0)$, $(2, 0)$.

**Exercice 12**

Montrer l'existence, l'unicité de réels $a$ et $b$ tel que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2\, dx$ soit minimum. Les déterminer.

**Exercice 13** *(cours, important)*

Soit $(E, (|))$ un espace euclidien.

**1.** Étant donné un endomorphisme autoadjoint $u$ de $E$, on considère l'application $b_u : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $b_u(x, y) = (x|u(y))$ pour tous $x, y \in E$. Que peut-on dire de $b$ ? Si $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$, comparer $\mathrm{mat}(b, \underline{e})$ et $\mathrm{mat}(u, \underline{e})$.

**2.** Réciproquement, montrer que pour toute application bilinéaire symétrique $b$ sur $E$, il existe un unique endomorphisme autoadjoint $u_b$ de $E$ tel que $b(x, y) = (x|u_b(y))$ pour tous $x, y \in E$.

Remarque : une matrice symétrique réelle peut être vue comme la matrice (dans une certaine base) d'une forme quadratique ou la matrice (dans une certaine base) d'un endomorphisme autoadjoint (pour la structure euclidienne rendant la base orthonormée). Les résultats précédents donnent le lien entre la forme quadratique et l'endomorphisme autoadjoint.

**Exercice 14** *(orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques)*

On considère la forme bilinéaire $b$ sur $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**1.** Décrire l'orthogonal pour $b$ d'un vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**2.** Décrire toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ orthogonales pour $b$ formées de vecteurs normés pour la norme usuelle de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement quelques unes de ces bases.

**3.** Décrire toutes les bases orthogonales pour $b$ qui sont orthonormées pour la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 15** *(diagonalisation d'un endomorphisme autoadjoint en base orthonormée)*

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. On considère l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1.** Justifier que $u$ est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^2$.

**2.** Diagonaliser $u$ en base orthonormée et écrire matriciellement la formule de changement base.

**3.** En déduire la signature de la forme quadratique $b$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\mathrm{mat}(b, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**4.** Mêmes questions pour $\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et faire le lien avec l'exercice précédent.

**Exercice 16**

Pour chacun des deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^2$ sont les suivantes, dire s'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ rendant l'endomorphisme autoadjoint :

**a.** $\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **b.** $\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 17**

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est-elle symétrique ? diagonalisable ?

**Exercice 18**

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On considère l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $u$ est autoadjoint et diagonaliser $u$ en base orthonormée.

**Exercice 19**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique vecteur $u \in E$ tel que $\phi = (u|.) \ : \ x \mapsto (u|x)$. Déterminer $\mathrm{mat}(\phi, \underline{b})$, $\mathrm{mat}(\phi, \underline{b}^*)$ et $\mathrm{mat}(u, \underline{b})$ où $\underline{b}$ désigne la base canonique de $E$, $\underline{b}^*$ sa base duale et $\mathrm{mat}(u, \underline{b})$ la matrice colonne des coordonnées de $u$ dans la base $\underline{b}$.

**1.** $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire $(|)$, $\underline{b}$ la base canonique et $\phi \ : \ (x, y, z) \mapsto 2x - y + z$.

**2.** $(E, (|))$ un plan euclidien de base orthonormée $\underline{b} = (e_1, e_2)$ et $\phi \ : \ x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto x_1 - 3x_2$.

**3.** $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $(|)$ associé à la norme $||(x, y)||^2 = x^2 + y^2 - xy$, $\underline{b}$ la base canonique et $\phi \ : \ (x, y) \mapsto 2x + y$.

**4.** $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(|)$ associé à la norme $||a + bX + cX^2||^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $\underline{b}$ la base canonique et $\phi \ : \ P \mapsto P(1)$.

**5.** $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(|)$ associé à la norme $||P||^2 = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2$, $\underline{b}$ la base canonique et $\phi \ : \ P \mapsto P(2)$. On pourra exprimer la forme linéaire $P \mapsto P(2)$ comme combinaison linéaire des formes linéaires $P \mapsto P(-1)$, $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P(1)$

**Exercice 20**

Pour chacun des exemples suivants, déterminer l'adjoint de l'endomorphisme $u$ et déterminer si $u$ est autoadjoint. Déterminer la matrice de $u$ dans la base $\underline{b}$ considérée.

**1.** Pour $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire associé à la norme $||a + bX + cX^2||^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $\underline{b}$ sa base canonique, et $u$ l'endormorphisme de $E$ défini par $u(P) = P'$.

**2.** Pour $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire associé à la norme $||a + bX + cX^2||^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $\underline{b}$ sa base canonique, et $u$ l'endormorphisme de $E$ défini par $u(P) = P(X + 1)$.

**3.** pour $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire associé à la norme $||P||^2 = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2$, $\underline{b}$ la base canonique et $\phi \ : \ P \mapsto P(X + 1)$. On pourra exprimer la forme linéaire $P \mapsto P(2)$ comme combinaison linéaire des formes linéaires $P \mapsto P(-1)$, $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P(1)$ puis calculer $u^*(1), u^*(X), u^*(X^2)$.

**Exercice 21**

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(\sum a_iX^i, \sum b_iX^i) = \sum a_ib_i$, les endomorphismes suivants admettent-ils un adjoint ? Si oui, le déterminer.

a) $X^i \mapsto X^{i+1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

b) $X^i \mapsto X^{i-1}$, pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $1 \mapsto 1$.

**Exercice 22**

**1.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose que $A$ est définie positive, au sens où la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A$ est une forme définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive $B$ telle que $A = B^2$.

**2.** Montrer qu'il n'existe pas de matrice symétrique $B$ de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**3.** Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B$ de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 23**

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer de deux manières que si $u^* = u$ et $u^k = 0$, alors $u = 0$ :

**a.** en utilisant le théorème spectral.

**b.** en traitant d'abord le cas $k = 2$ par la définition de l'adjoint, puis le cas où $k$ est une puissance de 2.

**Exercice 24**

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que si $u^* = u$ et $u^k = id$, alors $u^2 = \mathrm{id}$.

**Exercice 25**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 2 et $\underline{e} = (e_1, e_2)$ une base de $E$. On munit $E$ du produit scalaire rendant $\underline{e}$ orthonormée et de l'orientation rendant $\underline{e}$ directe (on pourra traiter l'exercice avec $E = \mathbb{R}^2$ et $\underline{e}$ la base canonique).

**1.** Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est :

$$\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $u$ est une rotation et donner sa matrice dans la base $\underline{e'} = (e_2, e_1)$

**2.** Soit $v : E \to E$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est :

$$\mathrm{mat}(v, \underline{e}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $v$ est une symétrie orthogonale et déterminer son axe. Donner une base orthonormée $\underline{f} = (f_1, f_2)$ telle que $\mathrm{mat}(v, \underline{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les bases orthonormées $\underline{b}$ telles que $\mathrm{mat}(v, \underline{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Interpréter géométriquement l'angle $\theta$ tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

**Exercice 26**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. On munit $E$ du produit scalaire rendant $\underline{e}$ orthonormée et de l'orientation rendant $\underline{e}$ directe (on pourra traiter l'exercice avec $E = \mathbb{R}^3$ et $\underline{e}$ la base canonique).

Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est :

$$\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1.** Montrer que $u$ est une rotation.

**2.** Déterminer $v_1 \in E$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $u$ est la rotation $r_{v_1,\theta}$ d'axe la droite dirigée et orientée par $v_1$ et d'angle $\theta$. (Si $H$ est un hyperplan d'un espace vectoriel orienté $E$ de dimension $n$ et si $v \in E \setminus H$, alors, par convention, on oriente $H$ par toute base $b_H$ de $H$ telle que $(b_H, v)$ soit une base directe de $E$.)

**3.** Trouver une base orthonormée directe $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ de $E$ telle que

$$\mathrm{mat}(u, \underline{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vérifier le résultat à l'aide de la formule de changement de base.

**4.** Déterminer $\mathrm{mat}(u, (-f_1, f_2, f_3))$, $\mathrm{mat}(u, (f_1, f_2, -f_3))$ et $\mathrm{mat}(u, (-f_1, f_2, -f_3))$. Parmi les trois bases condidérées, lesquelles sont directes ? Déterminer $\theta_1$ et $\theta_2$ tels que $u = r_{f_1,\theta_1} = r_{-f_1,\theta_2}$. Comment cela s'interprète-t-il en terme d'orientation ?

**Exercice 27**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. On munit $E$ du produit scalaire rendant $\underline{e}$ orthonormée et de l'orientation rendant $E$ directe (on pourra traiter l'exercice avec $E = \mathbb{R}^3$ et $\underline{e}$ la base canonique).

Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est :

$$\mathrm{mat}(u, \underline{e}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $u$ est un endomorphisme orthogonal (isométrie) et trouver ses caractéristiques.

**Exercice 28**

Compléter la matrice $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale.

Quelle isométrie de $\mathbb{R}^3$ définit-elle ? (C'est-à-dire si $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire et de son orientation canoniques et si $u$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice précédente, décrire les caractéristiques de l'isométrie $u$.)

**Exercice 29**

Soit $E$ un espace euclidien, $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaire et $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

**1.** Montrer de deux manières que $p$ est une projection orthogonale si et seulement si c'est un endomorphisme autoadjoint :

**a.** en utilisant la définition de l'adjoint.

**b.** en utilisant le théorème spectral.

**2.** Montrer que si $G = F^\perp$, alors pour tout $x \in E$, on a $||p(x)|| \leq ||x||$.

**3.** Montrer réciproquement que si on a $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x \in E$, alors $F \perp G$. Indication : prendre $f \in F$, $g \in G$ et considérer les vecteurs $f + tg$ avec $t \in \mathbb{R}$.

**Exercice 30**

Soit $E$ un espace euclidien

**1.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces supplémentaire et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. Montrer que :

**a.** $s$ est un endormorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (c'est-à-dire $F \perp G$).

**b.** $s$ est un endormorphisme autoadjoint si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

**2.** Quels sont les endomorphismes de $E$ à la fois orthogonaux et autoadjoints ?