Dénombrement

Préparation à l'agrégation interne

Année 18/19

1 Notions

Vérifier si vous connaissez les notions ci-dessous et le cas échéant, les revoir

1. Théorie des ensembles : Appartenance, inclusion, égalité, réunion, intersection, lois de Morgan.
2. Définition d'un ensemble fini et du cardinal d'un ensemble fini.
3. Définition d'un ensemble dénombrable.
   (a) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrables.
   (b) Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
4. Principes de dénombrement :
   (a) Principe de bijection (Exercices 1,4,7)
   (b) Principe d'addition (Tous les exercices)
   (c) Principe de multiplication
   (d) Permutation, arrangement
   (e) Principe des tiroirs (Exercice 6)
   (f) Principe de division ou principe des bergers.
5. Parties d'un ensemble
   (a) Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments.
   (b) Cardinal de l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.
6. Formules
   (a) Coefficients binomiaux. Formule du binome. Triangle de Pascal.
   (b) Coefficients multinomiaux.
   (c) Formule d'inclusion/exclusion.(Exercice 2)
7. Méthodes
   (a) Etablissement de formules de récurrence. Exercices 1,3,4
   (b) Utilisation de séries génératrices. Exercices 2,3.

2 Proposition d'exercices

Ref pour certains : oraux X-ENS, algèbre 1 ; exercice d'algèbre pour l'agrégation, Francinou Gianella ; compléments d'algèbre et de géométrie, collection Capes/agreg ; livre pour l'oral d'exercices pour l'agreg interne ; en chercher d'autres

Exercice 1. Nombres de Fibonnaci On dispose d'un damier de taille $2 \times n$ et de dominos de taille 1×2 que l'on peut poser horizontalement ou verticalement.
On note F_n le nombre de façons de recouvrir le damier avec les dominos.

1. Calculer F_1, F_2, F_3.
2. Formule explicite 1
   (a) Montrer que si un domino est posé horizontalement sur la première ligne, alors il y a un autre domino juste en dessous.
   (b) En déduire la formule :
   $$F_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n-k}{k}$$
3. Formule de récurrence
   (a) Montrer que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   (b) Formule explicite 2
   Montrer que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \right)$.

Exercice 2. Nombre de dérangements
On note pour ≥ 1, $D_n = |\{\sigma \in S_n / \ \forall k, \ \sigma(x) \neq x\}|$, c'est à dire le cardinal de l'ensemble des permutations à n éléments sans point fixe. On note pour $0 \leq k \leq n$, $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des permutations à n éléments ayant k points fixes et P_k son cardinal.

1. **Méthode 1**
   (a) Montrer que $P_k = \binom{n}{k} D_{n-k}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = n!$.
   (c) Montrer que $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
2. **Méthode 2** Retrouver la formule précédente en utilisant la formule du crible.
3. **Méthode 3**
   (a) Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{D_k}{k!} z^k$. Montrer que le rayon de convergence est supérieur ou égal à
   1. Montrer en utilisant la formule de la question 1(b) que $f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.

   (b) Retrouver la formule

Exercice 3. Nombres de Bell
On note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. Montrer que $B_n \leq n^n$.

2. Soit $f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} z^k$. Montrer que le rayon de convergence est strictement positif et montrer que $f(z) = e^{e^z - 1}$ en calculant $f'(z)$.
3. Montrer que $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$.

Exercice 4. Nombres d'arbres
Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un graphe est un arbre si pour tous sommets distincts de V a et b, il existe un unique chemin les reliant. Si $x \in V$, on note $d(x)$ le nombre d'arêtes issues de x. On appelle feuille un sommet de l'arbre n'ayant qu'un voisin, i.e. un sommet x tel que $d(x) = 1$.
On suppose que V et E sont des ensembles finis.

1. **Lemme des poignées de main**
   Montrer que $\sum_{x\in V} d(x) = 2|E|$. *Principe de double comptage*
2. Montrer que si on enlève une arête à un arbre on obtient deux arbres.
3. Montrer par récurrence que le nombre d'arêtes d'un arbre à n sommets est $n-1$.
4. Montrer qu'un arbre a au moins deux feuilles.
5. **Algorithme de Prüfer** On suppose que $V = \{1, \ldots, n\}$. On définit la suite d'arbres $T_0, \ldots, T_{n-2}$ et la suite d'éléments de V, $a_1, \ldots, a_{n-2}$ par récurrence de la façon suivante :
   — $T_0 = G$.
   — Soit $i \geq 0$. On suppose $T_0, \ldots, T_i$ et $a_1, \ldots, a_{i-1}$ construits.
   On note b_{i+1} la plus petite feuille de T_i et a_{i+1} son voisin. On définit alors $T_{i+1} = T_i \setminus \{b_{i+1}\}$. C'est donc un arbre.
   Dessiner un arbre de sommets $\{1, \ldots, 7\}$ et trouver le 5-uplet $(a_1, \ldots, a_5)$ associé par l'algorithme précédent.
6. Montrer que l'algorithme précédent fournit une bijection de l'ensemble des arbres de sommets $\{1, \ldots, n\}$ sur $[\![1, n-2]\!]$.
   Pour ceci écrire un algorithme de décodage.

Exercice 5. Approximation d'un irrationnel par des rationnels
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de montrer qu'il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2}$.
On définit $y_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Montrer qu'il existe $0 \leq i < j \leq n$ tel que $|y_i - y_j| \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire le résulat.
3. En utilisant la propriété pour $x = 2\pi$, montrer que $(\cos n)_{n\geq 0}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 6. Nombre de colliers de perles
Déterminer le nombre de colliers à 8 perles comportant 2 perles jaunes et 7 perles rouges.
Exercice sur les groupes et groupe opérant sur un ensemble.

Exercice 7. Le problème du scrutin
Voir feuille exercice dénombrement.