UGA, Agrégation interne décembre 2019

Actions de groupes et géométrie

A) Groupes opérant sur un ensemble et géométrie

Exercice 1 ANGLES Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

1. L'action naturelle de $\mathrm{SO}(E)$ sur l'ensemble des vecteurs unitaires de E est-elle transitive ? Quelles sont ses orbites ? Quel est le stabilisateur d'un vecteur u ?

2. Mêmes questions pour l'action de $\mathrm{SO}(E)$ sur l'ensemble des *couples* de vecteurs unitaires (action diagonale).
Les orbites pour ces couples forment l'ensemble $\mathcal{A}$ des *angles orientés* $(\widehat{u,v})$ *de vecteurs unitaires* du plan.

3. Définir une bijection ρ de l'ensemble $\mathcal{A}$ de ces angles $(\widehat{u,v})$ sur le groupe abélien $\mathrm{SO}(E)$. Par transport de structure via ρ, ceci munit $\mathcal{A}$ d'une loi de groupe additif.

4. Montrer la *relation de Chasles* $(\widehat{u,v}) + (\widehat{v,w}) = (\widehat{u,w})$.

5. Si u, u', v, v' sont unitaires dans E, montrer que $(\widehat{u,v}) = (\widehat{u',v'})$ ssi $(\widehat{u,u'}) = (\widehat{v,v'})$.

Exercice 2 Soit G un groupe fini opérant transitivement sur un ensemble fini X. On considère un point $x \in X$ et on note H son stabilisateur.

1. Pour $g \in G$, expliciter le stabilisateur du point $g \cdot x$.

2. À quelle condition sur H l'action de G est–elle fidèle ? Et si de plus G est abélien ?

Exercice 3 NOMBRE D'ORBITES ET G–COLORIAGES

1. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X fini. Montrer la *formule de Burnside* qui donne le nombre N d'orbites pour cette action :

$$N = \frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{card} \operatorname{Fix}(g)\,,$$

où $\operatorname{Fix}(g)$ ($g \in G$) désigne l'ensemble des $x \in X$ tels que $g \cdot x = x$ *(on pourra dénombrer de deux manières l'ensemble* $E = \{(g,x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$*).*

Un ensemble $\mathcal{C}$ de q couleurs étant fixé, on appelle *G–coloriage* de X par $\mathcal{C}$ toute G–orbite de l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions de X dans $\mathcal{C}$, où on munit $\mathcal{F}$ de l'action induite.

2. Expliciter l'action de G sur $\mathcal{F}$ et montrer qu'une fonction f de $\mathcal{F}$ est fixe par l'élément g de G ($g \in G$) ssi f est constante sur les $\langle g \rangle$–orbites de X.

3. En déduire que le nombre de G–coloriages de X vaut $\frac{1}{\operatorname{card} G} \sum_{g \in G} q^{|X/\langle g \rangle|}$, où pour tout g on note $|X/\langle g \rangle|$ le nombre de $\langle g \rangle$–orbites de X.

Des exemples :

4. Colliers de perles À partir de perles de couleur rouge ou bleue, combien peut–on faire de colliers de 6 perles différents ? (on identifie deux colliers à rotation et symétrie près, *ie* modulo l'action du groupe diédral D_6, cf. exo 9.)

5. Dénombrer les coloriages possibles d'un cube, à rotation près, où chaque face est coloriée avec l'une des 3 couleurs blanche, rouge, ou bleue (voir exo 11-9).

B) Actions de groupes et structure des groupes finis

Exercice 4 Théorème de Cauchy, preuve de J. McKay

Soient p un nombre premier et G un groupe fini d'ordre multiple de p. Dans G^p, on considère la partie $S = \{(x_1, \ldots, x_p) | \, x_1 \cdots x_p = 1_G\}$.

On fait agir $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ par permutation circulaire sur G^p : pour $\bar{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in G^p$, on pose $\bar{k} \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (x_{1+k}, \ldots, x_{p+k})$, où les indices sont vus modulo p : $x_{l+p} = x_l = x_{[l]}$ pour tout l, en notant $[l]$ le représentant de $\bar{l}$ dans $\{1, \ldots, p\}$.

1. Montrer que S est stable sous l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Quelles sont ses orbites à 1 élément ?

2. Calculer le cardinal de S et conclure que G possède au moins un élément d'ordre p.

Exercice 5 Des sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe fini. On suppose que G possède un sous–groupe H d'indice p le plus petit facteur premier de $\operatorname{card} G$.

Montrer que H est distingué dans G (utiliser l'action de G par translation sur G/H) : c'est le théorème de Ore.

2. Montrer que si un groupe infini G possède un sous-groupe d'indice fini, alors il possède un sous-groupe *distingué* d'indice fini.

Exercice 6 Groupe d'isométries du carré et S_4

1. On note D_4 le groupe des isométries du carré de sommets $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ euclidien (voir aussi exo 9). On numérote les sommets dans le sens trigonométrique. Montrer que D_4 agit sur l'ensemble des 4 sommets. Étudier cette action et énumérer les permutations du sous-groupe de S_4 ainsi obtenues.

2. En modifiant l'ordre de numérotation des sommets, montrer que S_4 possède 3 sous–groupes isomorphes à D_4, tous conjugués. Quelle est leur intersection deux à deux ? On reconnaîtra un même sous–groupe distingué de S_4.

Exercice 7 Le groupe alterné A_4

a) Donner le type des éléments de A_4 et le nombre d'éléments de chaque type. Pour chaque type, déterminer le cardinal de la classe de conjugaison dans A_4. Montrer(*) que si σ est un 3–cycle, σ et σ^2 ne sont pas conjugués.

b) Soit H un sous-groupe distingué de A_4. En remarquant que H est réunion de classes de conjugaison, montrer que H est A_4, V_4 ou $\{id\}$. Le groupe A_4 contient-il un sous-groupe d'indice 2 ?

C) Groupes finis d'isométries, en dimension 2 et 3

Exercice 8 Déterminer le groupe des isométries affines du plan qui conservent globalement la partie X suivante :

i) la réunion des axes Ox et Oy

ii) l'ensemble des deux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

iii) l'ensemble des quatre points $(\pm 1, 0)$ et $\pm(1, 1)$

iv) l'ensemble $\{(\pm 2, \pm 1)\}$ (sommets d'un rectangle)

v) une ellipse non circulaire, qu'on peut supposer d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$.

(voir aussi exo 15).

Exercice 9 Groupe diédral des isométries d'un polygone régulier [1]

On fixe un entier $n \geq 3$. On dit qu'un groupe G est *diédral de type* D_n, s'il est engendré par deux éléments r, s tels que : r est d'ordre n, s est d'ordre 2 et $rsrs = 1_G$ (de manière équivalente, $rs = sr^{-1}$).

1. On se place dans le plan euclidien usuel, identifié à $\mathbb{C}$. On considère le polygone convexe régulier à n côtés $\mathcal{P}_n$, de sommets les $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$, et on définit les isométries r et s par : $\forall z \in \mathbb{C}, r(z) = e^{2i\pi/n}z, s(z) = \bar{z}$ (r est la rotation d'angle $2\pi/n$ et s est la réflexion d'axe Ox). On note G le sous–groupe $\langle r, s \rangle$ de $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$.

a) Montrer que G est diédral de type D_n.

b) Montrer que le groupe des isométries du plan euclidien qui conservent l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}_n$ est G, et que G est d'ordre $2n$ (on vérifie que c'est aussi le groupe des isométries du polygone $\mathcal{P}_n$). Pour $n = 3$ et $n = 4$, dessiner $\mathcal{P}_n$ et les axes des réflexions de son groupe d'isométries.

c) Vérifier que G agit transitivement sur l'ensemble des $2n$ couples formés d'un côté de $\mathcal{P}_n$ et de l'un de ses deux sommets.

2. Soit $G = \langle r, s \rangle$ un groupe diédral de type D_n.

1. déf : ligne polygonale fermée définie par une suite de points $(P_1, \ldots, P_n)$, telle que tous les côtés P_iP_{i+1} ($1 \leq i \leq n$, $P_{n+1} = P_1$) soient égaux, de même que tous les angles $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}$.

a) Montrer que : $G = \{1_G, r, \ldots, r^{n-1}\} \cup \{s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$ et que G est d'ordre $2n$.

b) Montrer que deux groupes diédraux de type D_n sont isomorphes.

3. Montrer que S_3 est diédral de type D_3 (le groupe du triangle équilatéral).

Exercice 10 Groupe des isométries du tétraèdre régulier, applications
Dans $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dimension 3 on considère un tétraèdre régulier[2] T et on note G le groupe des isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses sommets. Les questions 3. et 4. peuvent être résolues en utilisant les éléments de G et sa structure.

1. Construire un morphisme injectif φ de G dans S_4.

2. En exhibant des réflexions dans G qui fixent 2 sommets, montrer que φ est un isomorphisme. Montrer que l'image par φ du sous-groupe G^+ des *déplacements* de G est le groupe alterné A_4. Identifier les éléments de G^+.

3.a) Montrer que l'isobarycentre O des quatre sommets de T en est équidistant.

b) Montrer que les hauteurs de T sont concourantes en O et coupent les faces en leur centre de gravité.

4.a) Justifier que les paires d'arêtes opposées de T sont orthogonales. Quelle est leur perpendiculaire commune ?

b) En considérant la composée de demi–tours de G, montrer que les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées de T (les *bimédianes*) sont perpendiculaires deux à deux.

c) Expliciter géométriquement les deux types d'isométries négatives de G, notamment celles d'ordre 4.

(*) On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bimédianes. On dispose alors d'une version géométrique de l'*existence d'un morphisme surjectif de S_4 sur S_3* :

5. Justifier que G agit sur $\mathcal{B}$. Montrer que cette action définit un morphisme *surjectif* de $G \simeq S_4$ sur le groupe symétrique $S(\mathcal{B}) \simeq S_3$. Quel est son noyau ?

Exercice 11 Groupe des isométries du cube

Soit $\mathcal{C}$ un cube de $E = \mathbb{R}^3$ centré en l'origine. On numérote les sommets d'une face $A_1, \ldots, A_4$, puis on note B_i le sommet opposé de A_i ($1 \leq i \leq 4$). Les droites $D_i := (A_iB_i)$ sont alors les 4 grandes diagonales du cube. On note G, resp. G^+, le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ (resp. des rotations) qui laissent globalement invariant l'ensemble des

2. T est l'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires équidistants les uns des autres, qui sont alors ses sommets.

sommets de $\mathcal{C}$; tout élément de G induit une permutation des 8 sommets de $\mathcal{C}$, et il fixe leur isobarycentre (0), c'est donc une isométrie *vectorielle* de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que G agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des grandes diagonales de $\mathcal{C}$. En utilisant la numérotation des D_i, on en déduit un morphisme φ de G dans S_4.

2. Montrer que $\varphi(-id_E) = id_{S_4}$ et que $\ker \varphi \cap G^+ = \{id_E\}$ (on étudiera la restriction d'un élément g du noyau à chaque grande diagonale, on se ramènera au cas où $g_{|D_1} = id$).

3. Dans cette question on montre que les transpositions sont dans $\varphi(G^+)$. Sans perte de généralité, on cherche $g \in G^+$ telle que $\varphi(g)$ soit la transposition (12). On note I le milieu de l'arête A_1A_2, J le milieu de l'arête B_1B_2 et r le retournement (rotation d'angle π) d'axe (IJ).

Montrer que r est dans G^+, puis que $\varphi(r) = (12)$.

4. Conclure que la restriction de φ à G^+ est un isomorphisme sur S_4.

5.(*) Soit X l'ensemble des paires de faces opposées de $\mathcal{C}$. Montrer que G^+ agit transitivement sur X. En déduire un morphisme surjectif de S_4 dans S_3 dont on explicitera le noyau (cf. exo 11, 4c).

6. Faire la liste des types de rotations de G^+, en identifiant leur axe et angle, suivant le type de la permutation qu'elles induisent sur $\mathcal{D}$.

7. Notons G^- l'ensemble des isométries négatives de G. Montrer que G^- est l'ensemble des $-g$, où g parcourt G^+, une classe modulo G^+.

8. En déduire que G est isomorphe à $G^+ \times \{-id_E\}$ et donc à $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9. Reprendre la liste obtenue en 6. et donner pour chaque type d'élément g le nombre d'orbites de l'action de $\langle g \rangle$ sur l'ensemble des 6 faces de $\mathcal{C}$ (application : exo 3-5).

Exercice 12 *[L325]* Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube de l'espace affine euclidien de dimension 3 (où $ABCD$ est une face et chaque MM' est une arête)

1. Justifier qu'il existe une unique application affine f telle que $f(O) = O$, $f(A) = B$, $f(B) = B'$ et $f(B') = C'$.

2. Montrer que f est une isométrie.

3. Déterminer la matrice de sa partie linéaire dans une base convenable.

4. Déterminer la nature et les éléments de f.

5. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs de $[AB], [BB'], [B'C'], [C'D'], [D'D], [DA]$. Montrer, en utilisant f, que ces 6 points sont les sommets d'un hexagone régulier.

Exercice 13 Tout sous–groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ est cyclique ou diédral

1.a) Montrer que tout sous–groupe fini de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ est cyclique.

b) Soit G un sous–groupe fini de $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ qui n'est pas inclus dans $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. On note $G^+ = G \cap \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $[G : G^+] = 2$. Montrer que si $\mathrm{card}\,(G^+) \geq 3$, G est diédral (cf. exo 9) et que sinon G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (groupe assimilé à un groupe diédral).

c) Conclure que *tout sous–groupe fini de $O(\mathbb{R}^2)$ est cyclique ou diédral.*

2. Soit maintenant E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, euclidien pour le produit scalaire $b =<\,,\,>$. On notera $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries de (E, b). On se donne G un sous–groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

Pour tous x, y dans E on définit $b'(x,y) = \frac{1}{\mathrm{card}\,G} \sum_{g \in G} < g(x), g(y) >$.

a) Montrer que b' est un produit scalaire sur E et que les éléments de G sont des isométries *de l'espace euclidien* (E, b').

b) (cf. exo 15 sur GL_n) Soient B, B' des bases orthonormées de E pour les produits scalaires b, resp. b', et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est la matrice de passage de B' à B.

Montrer que le conjugué $u \circ G \circ u^{-1}$ de G est inclus dans $\mathrm{O}(E)$. En déduire que *tout sous–groupe fini de $GL(E)$* (resp. $GL_n(\mathbb{R})$) *est conjugué à un sous–groupe fini de $O(E)$* (resp. $O_n(\mathbb{R})$).

3. Déduire de 1. et 2. que tout sous–groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ est cyclique ou diédral.

D) Groupe affine euclidien

Exercice 14 Soit u une isométrie de $\mathcal{E}$ espace affine euclidien de dimension n. On note $\vec{u}$ la partie linéaire de u, et E l'espace vectoriel sous–jacent à $\mathcal{E}$.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\,(\vec{u} - id_E) \ominus \mathrm{Im}\,(\vec{u} - id_E)$. On notera $F = \mathrm{Ker}\,(\vec{u} - id_E)$.

2. Caractériser les translations t_v de $\mathcal{E}$ qui commutent avec u.

3. Montrer que si u possède un point fixe et $v \in E$, alors $t_v \circ u$ possède un point fixe si et seulement si $v \in F^{\perp}$.

4. Pour $n = 1$, puis 2 puis 3, quelles sont les isométries de $\mathcal{E}$ qui s'écrivent comme produit de $n + 1$ réflexions orthogonales, et pas de moins ?

5. Pour $n = 3$, trouver la condition pour que deux rotations données de $\mathcal{E}$ d'axes distincts commutent.

Exercice 15 Déterminer le groupe G des isométries affines du plan, resp. de l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3, qui conservent globalement la partie X suivante :

a) l'ensemble $\mathbb{Z} \times \{0\}$ du plan affine euclidien.

b) une droite donnée D de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$. Montrer qu'alors l'ensemble des vissages d'axe D est un sous–groupe d'indice 2 du sous–groupe G^+ des déplacements de G.

c) la réunion de deux droites non coplanaires de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

Exercice 16 Hélice Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$ l'hélice définie par $x = r\cos t, y = r\sin t, z = at, t \in \mathbb{R}$, où $ar > 0$.

1. Trouver un groupe de vissages V isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ qui laisse $\mathcal{H}$ invariante.

2. Donner un retournement r qui laisse $\mathcal{H}$ invariante (d'axe (Ox)). Décrire les isométries, $r \circ v$, où $v \in V$.

3. Montrer que $V \cup \{r\}$ engendre le groupe G des isométries affines de $\mathbb{R}^3$ qui conservent globalement $\mathcal{H}$.

Pour les exercices 17 à 20 on se donne $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien.

Exercice 17 Hauteurs d'un triangle Soit $\mathcal{T} = ABC$ un triangle non aplati de $\mathcal{P}$. Soient G l'isobarycentre de A, B, C et h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$. On note A', B', C' les images de A, B, C par h.

1. Montrer que la hauteur de $\mathcal{T}$ passant par A est la médiatrice de $[B', C']$.

2. En déduire que les trois hauteurs de $\mathcal{T}$ sont concourantes.

Exercice 18 Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{P}$, de centres O et O' et de rayons inégaux R et R', combien y a–t–il d'homothéties de $\mathcal{P}$ qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$? Construire leur centre.

Exercice 19 Étant données r et r' deux rotations de $\mathcal{P}$ de centres respectifs A et B et d'angles respectifs α et β, expliciter la composée $r' \circ r$ (décomposer r et r' en produit de symétries orthogonales convenables pour construire les éléments géométriques de $r' \circ r$).

Exercice 20 Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On note r_A la rotation de centre A et d'angle $a = \widehat{BAC}$, et on définit de même les rotations r_B et r_C.

1. Déterminer les isométries $f = r_C \circ r_B \circ r_A$ et $\tilde{f} = r_A \circ r_B \circ r_C$. Que peut–on dire si le triangle ABC est équilatéral ?

2. Déterminer de même la composée de symétries orthogonales $g = s_{(AB)} \circ s_{(CA)} \circ s_{(BC)}$: montrer que g n'a pas de point fixe et préciser sa décomposition canonique, selon que ABC est ou non rectangle en B.

3. Montrer que ${r_A}^2 \circ {r_B}^2 \circ {r_C}^2 = id_{\mathcal{P}}$ (utiliser les symétries de 3.).

Exercice 21 Pentagone de Van der Waerden

Soient A, B, C, D, E cinq points de $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. On suppose que $AB = BC = CD = DE = EA \neq 0$ et que les angles $\widehat{EAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$ et $\widehat{DEA}$ sont égaux. L'objectif est de montrer que les cinq points A, B, C, D, E sont coplanaires.

1. Montrer qu'il existe une isométrie f de $\mathcal{E}$ telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$, $f(D) = E$ et $f(E) = A$.

On suppose que les cinq points ne sont pas coplanaires.

2. Montrer que $f^5 = id_{\mathcal{E}}$.

3. En déduire que f est une rotation de $\mathcal{E}$.

4. Conclure. Peut–on étendre ce résultat à d'autres entiers que 5 ?

♢ ♢ ♢