Réduction des endomorphismes

Notations : K désigne un corps, et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension **finie** $n \geq 1$; et on note μ_u son polynôme minimal et χ_u son polynôme caractéristique.

1. SUITE RÉCURRENTE LINÉAIRE On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $(n \geq 1)$.

a) Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$.

c) Diagonaliser A et donner les coordonnées du vecteur (F_1, F_0) dans la base de vecteurs propres considérée.

d) Déduire de ce qui précède que $F_n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

e) Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Polynômes d'endomorphismes

2. ENDOMORPHISMES NILPOTENTS On suppose en a),b),c) qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$ (on dit que u est nilpotent d'indice p).

a) Pour tout j entre 0 et $p - 1$, montrer que $\mathrm{Ker}(u^j) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^{j+1})$.

b) En déduire que $p \leq n$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, avec des zéros sur la diagonale.

c) Montrer que l'endomorphisme $id_E - u$ est inversible et exprimer son inverse comme polynôme en u.

d) On suppose le corps K de caractéristique nulle. Montrer que u est nilpotent si, et seulement si, on a $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout k entre 1 et n.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS

a) Montrer (sans utiliser χ_u) que les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u.

b) Soit $Q \in K[X]$. Montrer que l'endomorphisme $Q(u)$ est inversible si et seulement si Q et μ_u sont premiers entre eux. Montrer qu'alors l'inverse de $Q(u)$ est un polynôme en u. À quelle condition l'algèbre $K[u]$ est-elle un corps ?

c) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$, et $P(u) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(u^2)$. En déduire que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$. Quel lien avec les s.e. caractéristiques ?

d) On prend $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier). Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^p = u$. Généraliser au cas où K est un corps fini quelconque (NB : en notant $q = \operatorname{card} K$, on a $q = p^r$, où p est la caractéristique de K).

4. Un polynôme annulateur On suppose ici que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.

a) Montrer que u est un automorphisme, exprimer u^{-1} dans $K[u]$.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - id) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2id)$ et déterminer les projecteurs associés à cette décomposition, sous forme de polynômes en u. Que peut-on dire de u ?

c) Expliciter u^k comme combinaison linéaire de u et id_E ($k \geq 2$).

5. Décomposition de Dunford Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on note $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) On suppose que $a = 0$. Donner la décomposition de Dunford de A (c.a.d. écrire $A = D + N$, avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente).

b) Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$. Déterminer les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de A.

d) Déterminer la décomposition de Dunford de A et calculer A^k pour tout $k \geq 1$.

6. Cayley-Hamilton sur K algébriquement clos En utilisant alors le théorème de trigonalisation sur K et une suite croissante de diviseurs de χ_u, montrer que $\chi_u(u) = 0$.

7. Endomorphismes de carré $-\,id_E$ On suppose ici que $K = \mathbb{R}$ et $u^2 = -\,id_E$.

a) Montrer que u est inversible et que la dimension de E est paire, donc $n = 2p$.

b) Soit $x \neq 0$ dans E. Montrer que x et $u(x)$ sont linéairement indépendants, et qu'ils engendrent un sous-espace stable de E.

c) Montrer que E est la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ de p plans E_i stables par u.

d) Pour tout i entre 1 et p, on choisit e_i non nul dans E_i, et on pose $f_i = u(e_i)$. Justifier que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_p)$ est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

Diagonalisabilité via les polynômes annulateurs

8. Déterminant circulant

Dans $M_n(\mathbb{C})$ on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer A comme un polynôme en J. En déduire le degré du polynôme minimal μ_J de J.

b) Donner μ_J. Quelles sont les valeurs propres de J ?

c) Montrer avec ce qui précède que A est diagonalisable et calculer $\det A$.

9. Matrices de permutation Soit $\sigma \in S_n$ le n-cycle $(1 \dots n)$, et $C_n \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée, c.a.d. la matrice de l'endomorphisme $(e_i \mapsto e_{i+1})_i$ de E, où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où on considère les indices modulo n.

a) Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C_n.

b) La matrice C_n est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres et la dimension de chaque sous-espace propre.

c) Mêmes questions en prenant $n = 5$ et la permutation $\sigma = (1\ 2\ 3) \circ (4\ 5)$.

10. Diagonalisabilité d'une puissance

On suppose K algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit $r \geq 2$ un entier.

a) On suppose u inversible. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^r est diagonalisable.

b) Est-ce encore vrai si u n'est pas inversible ?

11. Matrices par blocs Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ 3A & -A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$, matrices par blocs dans $M_{2n}(\mathbb{K})$.

1. (étude à la main) Étudier la diagonalisabilité de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

2.a) Calculer les matrices C^k, $k \geq 1$, puis $P(C)$, $P \in \mathbb{K}[X]$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que C soit diagonalisable.

Famille d'endomorphismes

12. Commutant d'un endomorphisme, exemples

On appelle *commutant* de u, noté $\mathcal{C}_u$, l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $u \circ v = v \circ u$. On rappelle que $K[u]$ désigne la sous-algèbre de $\operatorname{End}(E)$ constituée des polynômes en u.

a) Préciser la structure de $\mathcal{C}_u$. Pour quels u a-t-on $\mathcal{C}_u = \operatorname{End}(E)$?

b) Donner la dimension de $K[u]$ et montrer que $\mathcal{C}_u$ contient $K[u]$.

c) On suppose que la matrice de u dans une certaine base $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} aI_r & 0 \\ 0 & bI_{n-r} \end{pmatrix}$, où $1 < r < n$ et $a \neq b$. Déterminer $\mathcal{C}_u$ et le comparer à $K[u]$.

d) On suppose $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ et $u^2 = -\,id_E$ (cf. 7.b)). Déterminer $\mathcal{C}_u$; montrer $\mathcal{C}_u \simeq \mathbb{C}$.

e) On suppose ici que χ_u est scindé à racines simples. Montrer que $\mathcal{C}_u = K[u]$ (on pourra raisonner sur la restriction à chaque sous-espace propre de u, puis se placer dans une base associée).

f) Même question en supposant cette fois que E possède une base $\mathcal{B}$ de la forme $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$. (Indication : que vaut alors μ_u ? On pourra conclure en considérant l'application $v \mapsto v(x)$ de $\mathcal{C}_u$ dans E).

13. Diagonalisation, trigonalisation simultanées

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux.

a) Montrer que tout sous-espace propre de l'un des u_i est stable par chaque u_j.

b) On suppose chaque u_i diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de E faite de vecteurs propres communs à tous les u_i (on pourra raisonner par récurrence sur $n = \dim E$).

c) Dans la suite on suppose chaque u_i trigonalisable.

c-i) Montrer, par récurrence sur n, que les $(u_i)_{i \in I}$ ont un vecteur propre commun e_1.

On complète e_1 en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et on note $F = \operatorname{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$, p la projection sur F parallèlement à $\operatorname{Vect}(e_1)$, et u'_i l'endomorphisme $p \circ u_{i|F}$ de F.

c-ii) Relier la matrice A'_i de u'_i dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, \ldots, e_n)$ avec $A_i = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$. Montrer que les endomorphismes $(u'_i)_{i \in I}$ de F commutent deux à deux et sont trigonalisables.

c-iii) Conclure, par récurrence sur n, que les $(u_i)_{i \in I}$ sont cotrigonalisables.

c-iv) Donner deux matrices triangulaires qui ne commutent pas.

- $\diamondsuit$ -