Université Grenoble Alpes DSDA
Année 2019/2020
Agrégation interne
Suites et Séries

Exercice 1. *1. Montrer que les suites réelles* $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont divergentes.*

2. *On considère les deux suites :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!};\ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!};\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. Montrer que cette limite est irrationnelle.

Exercice 2. *Soit* $n \geq 2$*. On considère l'équation* $x^n = 1 + x$ *sur* $[1, +\infty[$.

1. *Montrer que l'équation admet une unique solution* x_n.
2. *Déterminer la limite de* $(x_n)_{n\geq 2}$.
3. *Formons un développement asymptotique à deux termes de la suite* $(x_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 3. *1. Nature de la suite* $(E(a^n)^{1/n})$ *pour* $a > 0$.

2. (a) *Établir que* $\forall x \geq 0, x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x$.

   (b) *En déduire la limite de*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 4. *On considère la suite réelle définie par :* $x_0 = 1$ *et* $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.

1. *Montrer que* x_n *est supérieur ou égal à* 1 *pour tout* n.
2. *Montrer que si* (x_n) *converge, sa limite* l *vérifie* $l = \sqrt{2l + 1}$.
3. l *étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver* $k \in]0, 1[$ *tel que* $|x_n - l| \leq k|x_{n-1} - l|$*? Si oui, en déduire que* $|x_n - l|| \leq k^n|x_0 - l|$*. Conclure.*

Exercice 5. *Considérons la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. *Montrer que* (u_n) *converge vers 0.*

2. *En utilisant le théorème de Cesaro, donner un équivalent de* (u_n).

Exercice 6. *Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme*

1. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
2. $\sum_{n\geq 0} \ln\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$

Exercice 7. *Déterminer la nature des séries de terme général* u_n.

$$a)u_n = n^{1/n^2} - 1;\ u_n = \frac{\ln n}{n^2};\ u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}};\ u_n = n^a\left(1-\cos\frac{1}{n}\right);$$

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln(n!)};\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}dx.$$

Exercice 8. *Déterminer si la série de terme général* u_n *est absolument convergente, semi-convergente, ou divergente :*

$$a)u_n = \frac{a^n \ln(n)}{\sqrt{n}+2};\ b)u_n = \frac{1+(-1)^n n}{n^2};\ u_n = \frac{\cos^2 n}{n};$$

$$u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right);\ u_n = (-1)^n\frac{\sin(\ln n)}{n}\ (\text{ étudier } v_n = u_{2n} + u_{2n+1})$$

Exercice 9.
1. *On considère la série de terme général* $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. *Montrer que* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2$.
2. *On définit pour* $n \geq 1$, v_n *par :* $v_{3p+1} = \frac{1}{2p+1}$, $v_{3p+2} = \frac{-1}{4p+2}$ $v_{3p} = \frac{-1}{4p}$ *(les termes sont ceux de la série précédente écrits dans un autre ordre). Montrer que* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *est convergente et que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 10. *On pose pour tout* $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ *et pour* $n \geq 2$, $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.

1. *Montrer que* f' *est intégrable sur* $[1, +\infty[$
2. *Montrer que la série de terme général* u_n *est absolument convergente.*
3. *Montrer que la suite* $(\cos(\ln n))$ *diverge.*
4. *En déduire la nature de la suite de terme général* $f(n)$.

Exercice 11. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}.$$

1. *Donner un équivalent simple de* S_n.
2. *Montrer que* $S_n = \ln n + C + o(1)$.

Exercice 12. 1. *On considère la série de terme général*

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ *et en déduire l'existence d'un entier* $k > 0$ *tel que*

$$n! \sim k\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

2. *Démontrer la formule de Wallis*

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}\right)^2 = \pi.$$

On posera $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, *on obtiendra une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n-2} *puis l'expression de* I_{2p} *et* I_{2p+1}.