Analyse - Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions. Convergence simple - Convergence uniforme.

Exercice 1 On considère pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$? (On pourra tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_n$ de f_n dans un repère orthonormé.)
3. Soit $0 < a < 1$. Qu'en est-il sur l'intervalle $[a,1]$?

Exercice 2 On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0, 1/2n[, \\ n - n^2x & \text{si } x \in [1/2n, 1/n[, \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1]. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ et calculer sa limite notée f.
2. La convergence est-elle uniforme sur $[0,1]$ ou $]0,1]$?
3. Comparer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 3 Etudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) suivantes

1. $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1[$,
2. $f_n(x) = n^2xe^{-nx},\ x \in [0,+\infty[$,
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+n)},\ x \in \mathbb{R}$,
4. $f_n(x) = xe^{x/n},\ x\ \in [0,+\infty[$,
5. $f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{xsin(x)}$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, et $f_n(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 On considère pour $n \geq 1$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right)$,
2. $g_n(x) = x - \dfrac{\sin x}{n}$,
3. $h_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx)$,
4. $i(x) = e^{-n|x|}\cos(nx)$.

Etudier la convergence simple et uniforme de ces suites de fonctions.

Exercice 5 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction dont la dérivée f' est uniformément continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Montrer que la suite de fonctions de terme général $n[f(x+\frac{2}{n}) - f(x+\frac{1}{n})]$, $n \geq 1$, converge uniformément vers f' sur $[a,+\infty[$.

Exercice 6 Soit $x \in [0,1]$. Etudier la nature de la suite numérique de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx$.

Exercice 7 Soit $a>0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$. Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ (on pourra commencer par déterminer l'éventuelle limite de la suite (f_n)).

Exercice 8 Critère de Cauchy uniforme

Définition. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble, soit (f_n) une suite de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On dit que (f_n) est uniformément de Cauchy sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 / \ \forall n \geq N, \forall m \geq N, \sup_A |f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Démontrer le critère de Cauchy uniforme : La suite (f_n) est uniformément de Cauchy sur A si et seulement si il existe $f : A \to \mathbb{C}$ telle que la suite (f_n) converge vers f uniformément sur A.

Exercice 9 Polynômes de Bernstein - Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit f une fonction consinue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

1. Calculer $B_n(f)$ avec
   a) pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$,
   b) pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x$,
   c) pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x(x-1)$.
   a) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1], \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$
   b) En déduire l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,1], \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
   c) Montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$.
3. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : *Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est limite uniforme d'une suite de polynômes sur $[a,b]$.*

Exercice 10

1. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme (on pourra utiliser l'exercice 8).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la convergence des polynômes P_n définis par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$?

Exercice 11 Soit (f_n) une suite de fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :
- La suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g,

- $\exists\, x_0 \in I,\ \exists\, c \in \mathbb{R}/\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f définie par
$$\forall x \in I,\ f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$
2. Que peut-on dire de la régularité de la fonction f ?

2. Séries de fonctions. Convergences simple et uniforme - Convergence normale.

Exercice 12 On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. La série $\sum f_n$ converge-t-elle absolument sur $]0,+\infty[$?
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$? Enoncer le théorème utilisé.
4. Existe-t-il $n_0 \geq 0$ et $a > 0$ tels que la série de fonctions f_n, définie pour $n \geq n_0$, converge normalement sur $[a,+\infty[$?
5. Montrer que la fonction $f : x \in]0,+\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Enoncer le théorème utilisé.
6. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Enoncer le théorème utilisé.

Exercice 13 Enoncer et démontrer le critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions (voir exercice).

Exercice 14 Démontrer la règle d'Abel uniforme : Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un ensemble E et vérifiant :

1. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 0,\ \forall x \in E,\ |\sum_{k=0}^{n} g_k(x)| \leq M$,
2. La série $\sum |f_n - f_{n+1}|$ converge uniformément sur E,
3. La suite (f_n) converge vers 0 uniformément sur E.

Alors la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur E.

Exercice 15 Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, mais n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$. On énoncera le théorème utilisé.

Exercice 16

1. Rappeler le théorème d'intégration pour les séries de fonctions convergeant uniformément.
2. Démontrer l'identité :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt = x.$$
3. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2)$ (on pourra considérer pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \in [0,1/2] \mapsto x^n$).

Exercice 17 On considère la série de fonctions $S = \sum f_n$ avec, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Étudier la convergence (simple, uniforme, absolue, normale) de cette série.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} S(x)/x = +\infty$. L'application S est-elle dérivable en 0 ?
4. Montrer que $\lim_{x\to +\infty} S(x) = 0$.

3. Séries entières : rayon de convergence, fonctions DSE

Exercice 18

1. Démontrer le Lemme d'Abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. En particulier, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0,r')}$ pour tout $0 < r' < r$.
2. Que peut-on dire pour $|z| = r$?

Exercice 19 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{a^n}{1+b^n} z^n$ suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 20 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières réelles $\sum a_n x^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]R; R[$: $a_n = n$; $a_n = n(n-1)$; $a_n = n^2$; $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$; $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

Pour chacune des séries précédentes, préciser le type de convergence (simple, uniforme, normale).

Exercice 21 Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} z^n$. On précisera la méthode utilisée.

Etudier la convergence des séries numériques $\displaystyle\sum \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} R^n$ et $\displaystyle\sum \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} (-R)^n$.

Exercice 22 Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$. On pose $a_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = a\, a_n \text{ si } n \equiv 0[2] \\ a_{n+1} = b\, a_n \text{ si } n \equiv 1[2] \end{cases}$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\sqrt{|ab|}}$.

Exercice 23 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note, pour $|z| < R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que pour tout $0 \le r < R$ l'application $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(re^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt = a_n r^n.$$
2. Démontrer le **Théorème de Liouville :** Soit f une fonction DSE sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $a, b, c > 0$ tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \le a\,|z|^b + c.$$
Montrer que f est un polynôme.

Exercice 24 Soit $R > 0$. *On dit qu'une fonction $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0 de rayon de convergence R (et on dit f est DSE(R)) s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R' \ge R$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $|x| < R$.*

1. a) Soit f une fonction définie sur $]-R,R[$. Montrer que f est DSE(R) si et seulement si

$$\begin{cases} \text{f est de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \text{et} \\ \forall x \in]-R,R[, \ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = 0. \end{cases}$$

   b) Exprimer alors les coefficients du développement en série entière de f.

2. Donner un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il n'existe pas $R > 0$ tel que $f \in DSE(R)$.

3. a) Rappeler la définition de la fonction exp comme solution d'une équation différentielle et montrer que exp est DSE(R) pour tout $R > 0$.

   b) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}, \ \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 25 Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}; \ g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6).$$

Exercice 26 Calculer, suivant les valeurs du paramètre réel t, le développement en série entière en zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}.$$

On distinguera les cas $|t| < 1$ (poser alors $\theta = \arccos t$) , $|t| = 1$ et $|t| > 1$ (poser alors $\theta = Argch(t)$ avec $\theta > 0$ pour $t > 1$).

Exercice 27 Soit f la fonction définie par $\arctan\left(\dfrac{x \sin a}{1 - x\cos a}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $Def(f)$ de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $Def(f)$.
2. Montrer que la fonction f' vérifie

$$\forall x \in Def(f), \ f'(x) = \frac{\sin a}{x^2 - 2x\cos a + 1}.$$

3. En déduire : $\forall x \in]-1,1[, \ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)a)x^n$ (on pourra utiliser l'exercice 26).
4. En déduire le développement en série entière en 0 de la fonction f.