Université Grenoble Alpes **Année 2019-2020**

Agrégation interne de Mathématiques

Analyse - Problème sur les séries entières
Concours ESIM 1992

Pour tout réel α et tout réel x on note : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

Partie I.

1. a. Donner, suivant les valeurs de α, l'ensemble de définition D_α de la fonction f_α.
   b. Pourquoi f_α est-elle indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$?
2. Étude de la continuité et de la dérivabilité à droite en -1.
   a. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue à droite en -1 ?
   b. Pour $\alpha > 1$, étudier la dérivabilité de f_α à droite en -1.
   c. Calculer $f_2'(-1)$ (nombre dérivé à droite de f_2 en -1).
3. Étude de la continuité et de la dérivabilité à gauche en 1.
   a. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue à gauche en 1 ?
   b. Si $1 \notin D_\alpha$, montrer :
   $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f_\alpha(x) = +\infty.$$
   c. Pour $\alpha > 2$, étudier la dérivabilité de f_α à gauche en 1.
4. a. Étudier le signe de f_α' sur $]-1,1[$ lorsque $\alpha > 1$.
   b. Exprimer $f_1(x)$ et $xf_2'(x)$ à l'aide de fonctions classiques sur $[-1,1[$.
   c. Calculer la limite à gauche en 1 de f_2'.
5. Calcul de $f_2(1)$ et $f_2(-1)$.
   Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in [0, 2\pi[,\ g(x) = x^2.$$
   a. Énoncer le théorème de Dirichlet (on énoncera précisément les hypothèses émises).
   b. En l'appliquant à la fonction g au point $x = 0$, calculer $f_2(1)$.
   c. En remarquant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, calculer $f_2(-1)$.
6. Construire le tableau de variation de f_2 puis tracer avec précision la courbe représentative de f_2 (choisir une unité de 3 cms environ).

Partie II.

Dans cette partie, a_0 est un réel positif et $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. Lorsqu'elle existe, on note $g(x)$ la somme de cette série. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par S_n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose dans cette question que $\sum a_n$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
   a. Donner le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$ et la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.
   b. En déduire : $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.
2. On suppose dans cette question que $\sum a_n$ diverge et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite équivalente à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Montrer que $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

b. Prouver :

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = 1.$$

3. Déduire des questions II.1. et II.2. que lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + (1-x)\ln(1-x) + o[(1-x)\ln(1-x)].$$