**UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES** 2019-2020
**Préparation à l'agrégation interne**

**Devoir à la maison à rendre le 16 octobre**

**Notations :** on désigne par $K$ le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Lorsque $K = \mathbb{C}$ et $z \in K$, $|z|$ est le module de $z$ et $i^2 = -1$. Pour les entiers $n$ et $p \geqslant 1$, on note :

- $K^n$ le $K$-espace vectoriel des vecteurs $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ avec $z_j \in K$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$.
- $M_{n,p}(K)$ le $K$-espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $K$ ; et $M_n(K) = M_{n,n}(K)$.

On identifie $K^n$ et $M_{n,1}(K)$ donc, en calcul matriciel un vecteur s'identifie avec la matrice colonne ayant les mêmes éléments. Pour $A \in M_{n,p}(K)$, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ lorsqu'on veut préciser les éléments de $A$ ; quand le contexte est clair, on écrit simplement $A = (a_{i,j})$ ou $A = (A_{i,j})$. Pour $x \in K^n$, $D_x$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les coordonnées de $x$. Pour $A \in M_n(K)$, $\sigma_A$ désigne le spectre de $A$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de $A$ et $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma_A\}$. Pour $A \in M_n(K)$, ${}^tA$ est la transposée de $A$ ; et pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A^\star = {}^t\overline{A}$ (c'est-à-dire ${A^\star}_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$). $S_n(K)$ désigne le sous-ensemble des matrice symétriques de $M_n(K)$. Pour $K = \mathbb{R}$, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont respectivement les sous-ensembles des matrices symétriques positives et définies positives de $S_n(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice symétrique est positive (resp. définie positive) lorsque la forme quadratique qu'elle définit ne prend que des valeurs positives (resp. strictement positives) sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

## Partie I -

**I.A -** Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\ \|_\infty$ soit $\|z\|_\infty = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |z_j|$.

On définit l'application $A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto N_\infty(A) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j \in [1,2,\ldots,n]} |a_{i,j}|$.

I.A.1) Montrer que $A \mapsto N_\infty(A)$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

I.A.2) a) Montrer que $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{C}^n : \|A(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\, \|z\|_\infty$.

b) Montrer l'égalité

$$N_\infty(A) = \max_{z \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})} \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}.$$

c) Montrer que $\rho(A) \leqslant N_\infty(A)$.

I.A.3) Montrer que $N_\infty$ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall A \text{ et } B \in M_n(\mathbb{C}), N_\infty(AB) \leqslant N_\infty(A)\ N_\infty(B).$$

I.A.4) Soit $Q \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit

$$A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1}AQ).$$

a) Vérifier que $N_Q$ est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer qu'il existe une constante $C_Q$ telle que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leqslant N_Q(A) \leqslant C_Q N_\infty(A).$$

**I.B -** Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que l'on peut choisir une matrice diagonale $D_S \in M_n(\mathbb{C})$ avec $S = (s, s^2, s^3, \ldots, s^n) \in \mathbb{C}^n$ où $s$ est un réel strictement positif telle que :

$$N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon.$$

Étant donnés $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme matricielle $N_\varepsilon$ telle que :

$$N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.$$

**I.C -** En déduire l'équivalence $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

## Partie II -

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ fixée ; pour $i \in [1, 2, \ldots, n]$ on pose : $\quad L_i = \sum\limits_{j\in[1,2,\ldots,n]\ j\neq i} |a_{i,j}|$

$$C_i = \sum_{j\in[1,2,\ldots,n]\ j\neq i} |a_{j,i}|.$$

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) \text{ et } D_i(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leqslant L_i\}$$

$$G_C(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D'_i(A) \text{ et } D'_i(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leqslant C_i\}$$

On désigne par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

**II.A -**

II.A.1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix}.$$

Décrire les parties $G_L(A)$ et $G_C(A)$ du plan complexe.

II.A.2) On se propose de montrer l'inclusion $\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

a) Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ a une solution non nulle.
Montrer que
$$\exists p \in [1, 2, \ldots, n] \quad |m_{p,p}| \leqslant L_p.$$

b) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \sigma_A$. Utiliser II.A.2-a) et montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

c) Conclure en justifiant l'inclusion $\sigma_A \subset G_C(A)$.

II.A.3) On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ a une valeur propre $\mu$ sur la frontière topologique de $G_L(A)$ et soit $x$ un vecteur propre associé à $\mu$.

a) Montrer que si pour $k \in [1, 2, \ldots, n]$ on a $|x_k| = \|x\|_\infty$, alors $\mu \in C_k(A)$.

b) On suppose de plus que $a_{i,j} \neq 0\ \forall (i,j)$. Montrer que $\mu \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j(A)$.

II.A.4) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On note $p > 0$ lorsque $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $D_p$ matrice diagonale avec $p > 0$. Déterminer $G_L(D_p^{-1} A D_p)$.

II.A.5) a) Déduire de II.A.2) et II.A.4) l'inégalité

$$\rho(A) \leqslant \inf_{p>0} \left( \max_{i=1,2,\ldots,n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j\, |a_{i,j}| \right).$$

b) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par II.A.5)-a est supérieur ou égal à $\dfrac{83}{3}$.

ii) Déterminer $\rho(A)$.

**II.B - Applications**

II.B.1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [1, 2, \ldots, n] \quad |a_{i,i}| > L_i.$$

On dit que $A$ est strictement diagonale dominante (SDD).

a) Montrer que si $A$ est SDD alors $A$ est inversible.

b) Si $A$ est SDD et si de plus $\forall i\ a_{i,i}$ est réel et strictement négatif, montrer que pour tout $\lambda \in \sigma_A$, $Re(\lambda) < 0$.

c) Si $A$ est une matrice réelle symétrique et SDD, énoncer une condition suffisante pour qu'elle soit définie, positive.

II.B.2) Soit $B$ diagonalisable. Montrer qu'il existe une constante $\kappa_\infty(B)$ telle que

$$\forall E \in M_n(\mathbb{C}), \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E}, \exists \lambda_i \in \sigma_B \quad \left|\hat{\lambda} - \lambda_i\right| \leqslant \kappa_\infty(B)\ N_\infty(E).$$

## Partie III -

### III.A - Préliminaire

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients complexes. Soit $t \mapsto P_t$ une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ :

$$P_t(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X^{n-j}$$

où les $n$ applications $t \mapsto c_j(t)$ sont des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

On note $Z_t$ l'ensemble des racines de $P_t$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

III.A.1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t \in [0,1] \quad Z_t \subset D(0,R).$$

III.A.2) Soit $t_0$ fixé et $X_0 \in Z_{t_0}$. Montrer que la proposition $(P)$ suivante est vraie

$$(P) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t\ \ |t - t_0| < \eta, \exists X_t \in Z_t, |X_t - X_0| < \varepsilon.$$

### III.B -

III.B.1) Exhiber une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ pour laquelle $D_1(A)$ (notation Partie II) ne contient pas de valeurs propres de $A$.

III.B.2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $G_L(A)$ défini dans II. On se propose de prouver la propriété suivante : si $\forall j = 2, 3, \ldots, n, D_1(A) \cap D_j(A) = \emptyset$, le disque $D_1(A)$ contient au moins une valeur propre de $A$.

On suppose donc que, $\forall j = 2, 3, \ldots, n, D_1(A) \cap D_j(A) = \emptyset$.

On écrit $A = D + B$ où $D$ est diagonale et $B = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = a_{i,j}$ pour $i \neq j$ et $b_{i,i} = 0$.

On définit l'application : $t \in [0,1] \mapsto A(t) = D + tB \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $G_L(A(t)) \subset G_L(A)$.

b) Soit $E = \left\{ t \in [0,1] \ \mid\ \exists \lambda_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A) \right\}$.

i) Montrer que $E \neq \emptyset$.

ii) Montrer la propriété $\forall t \in E, \exists \eta > 0, ]t - \eta, t + \eta[ \cap [0,1] \subset E$.

iii) Montrer que $E$ est une partie fermée de $[0,1]$.

iv) En déduire que $E = [0,1]$. Conclure.

III.B.3) Déduire de la Partie II et de la Partie III une propriété du spectre de la matrice $A$ définie dans la question II.A.1).

## Partie IV - (indépendante de II et III)

**Rappels :** sur $M_n(\mathbb{C})$ on définit le produit hermitien et sa norme associée $N_2$, appelée norme de Frobenius :

Pour $A$ et $B \in M_n(\mathbb{C})$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,(AB^\star)$ et $N_2(A) = \sqrt{\langle A|A\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,\ldots,n} |a_{i,j}|^2}$.

### IV.A -

IV.A.1) Vérifier que $N_2$ est bien une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$.

Étant donnés $A$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, on définit leur H-produit noté $A \times_H B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ par $(A \times_H B)_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, n \quad j = 1, 2, \ldots, p)$.

IV.A.2) a) Si $A$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, et si $D \in M_n(\mathbb{C})$ et $\Delta \in M_p(\mathbb{C})$ sont des matrices diagonales, établir les égalités :

$$D(A \times_H B)\Delta = (DA\Delta) \times_H B = (DA) \times_H (B\Delta).$$

b) Soient $A$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, établir l'égalité : $\left(AD_x {}^tB\right)_{i,i} = [(A \times_H B)x]_i$.

c) Si $A$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $y \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^p$ montrer que

$$y^\star (A \times_H B)x = \operatorname{tr}\left(D_y^\star A D_x {}^tB\right).$$

(on pourra introduire la matrice colonne $e = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$.)

d) En déduire que $x^\star (A \times_H \overline{B})x = \langle D_x^\star A D_x | B\rangle$.

**IV.B -** Dans la suite on suppose $K = \mathbb{R}$, toutes les matrices sont à coefficients réels.

IV.B.1) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $T \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$.
Que peut-on dire de $T$ si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ?

IV.B.2) Soient $A$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $A \times_H B \in S_n^+(\mathbb{R})$. Que peut-on dire si $A$ et $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ?

IV.B.3) On se propose d'obtenir un encadrement des valeurs propres de $A \times_H B$ quand $A$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

a) On désigne par $\lambda_{\min}(A)$ (resp. $\lambda_{\min}(B)$) la plus petite valeur propre de $A$ (resp. $B$) et par $\lambda_{\max}(A)$ (resp. $\lambda_{\max}(B)$) la plus grande.
Montrer que les matrices $B - \lambda_{\min}(B)I_n$ et $A \times_H (B - \lambda_{\min}(B)I_n)$ sont symétriques positives.

b) Soit $\lambda(A \times_H B)$ une valeur propre de $(A \times_H B)$ et $x$ un vecteur propre pour cette valeur propre ($\|x\|_2 = 1$). Évaluer ${}^tx\,(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)\,x$ et en déduire

$$\lambda(A \times_H B) \geqslant \lambda_{\min}(B).\left(\min_i a_{i,i}\right).$$

c) Montrer que $a_{i,i} \geqslant \lambda_{\min}(A)$ et en déduire la minoration

$$\lambda(A \times_H B) \geqslant \lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B).$$

d) Établir de même la majoration

$$\lambda(A \times_H B) \leqslant \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B).$$

• • • FIN • • •