Université Grenoble Alpes **Année 2019-2020**
UFR IM^{2}AG **Agrégation Interne Mathématiques**

Exercices “Calcul différentiel”

L’objectif de cette feuille d’exercices est de revoir les notions de base sur les fonctions de plusieurs variables : continuité, dérivées partielles, différentiabilité, régularité, ainsi que les principaux résultats “géométriques” centraux dans la théorie : théorèmes des fonctions implicites et d’inversion locale, étude des extréma (liés) de fonctions de plusieurs variables.

Les huit premiers exercices présentent des exemples de fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}^n$ et permettent de s’entrainer aux calculs de différentielles, de dérivées partielles, ... Il est important pour chacun de ces exercices de bien regarder la forme des fonctions avant de se lancer dans les calculs, voire d’essayer de deviner pour chacune des fonctions si elle est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable,... avant de lire les questions. Revoir les définitions de continuité, de dérivées partielles et de différentielle d’une fonction pour traiter ces exercices.

Les exercices 10, 11 et 12 permettent de comprendre, sur des exemples “visuels”, les notions d’inversion locale, fonctions implicites, difféomorphisme. Revoir les théorèmes d’inversion locale et des fonctions implicites pour traiter ces exercices. Les exercices 13 à 17 proposent de s’entrainer ou d’appliquer ces théorèmes dans différents contextes.

Enfin, les exercices 18 à 23 permettent, dans différents contextes, d’étudier l’existence d’extréma et éventuellement de déterminer ces extrema (conditions nécessaires d’existence d’un extremum permettant de trouver les éventuels extrema, vérification).

I. Continuité - Différentiabilité

Exercice 1. **1.** En utilisant la définition de la différentielle d’une fonction en un point, calculer la différentielle en $(0,0)$ des applications de $\mathbb{R}^j$ $(j=2,3))$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x,y,z) = 2+3z+xy+z\sin(x^2+y^2), \quad g(x,y)=\sqrt{y^2+1}.$$

2. Calculer les dérivées partielles de la fonction g et montrer qu’elles sont continues.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y)\neq(0,0)\,, \\[2ex] f(0,0) &= 0\,. \end{cases}$$

1. L’application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. Calculez les dérivées partielles de f. Sont-elles continues ?

3. Pour tout $A:(a,b)$ et tout $H:(h,k)$ de $\mathbb{R}^2$, calculez directement $f'(A;H)=\lim_{t\to 0, t\neq 0}\frac{f(A+tH)-f(A)}{t}$. L’application $H\mapsto f'(A;H)$ est-elle linéaire en H ?

Exercice 3. On considère l’application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy}{2x^2+3y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\,, \\[2ex] f(0,0) &= 0\,. \end{cases}$$

Montrez que les dérivées partielles $D_1f(x,y)$ et $D_2f(x,y)$ existent pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, y compris à l'origine. La fonction f est-elle continue à l'origine ?

Exercice 4. Montrez que l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x,y) &= \dfrac{5x^3y}{2x^2+3y^2} + \dfrac{x^2|y|^{3/2}}{2x^2+3y^2} \text{ si (x, y)} \neq (0,0)\,, \\ \\ g(0,0) &= 0 \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5. Déterminer sur quelle partie de $\mathbb{R}^2$ la fonction f définie par $f(x,y)=\inf(x^2,y^2)$ est continue (resp. différentiable, resp. de classe $\mathcal{C}^1$).

Exercice 6. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie U de $\mathbb{R}^2$ et vérifiant sur U :

$$(i)\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{1+y^2} \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t) = f(t, f(t, f(t,t))).$$

Calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f. Traiter l'exemple $f(t,s)=ts^2$.

Exercice 8. Pour $b>0$, on définit la fonction h_b dans le demi-plan $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$ par :

$$h_b(x,y) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y-b}{x}\right).$$

1. Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\arctan(x)+\arctan(1/x)$.
2. Montrer que h_b se prolonge continûment au demi-plan $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$ privé du point $(0,b)$ et expliciter ce prolongement.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{h_b(x,0)}{x} = \frac{1}{b}$.

Exercice 9. Notons $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\varphi\| := sup_{x\in[0,1]}|\varphi(x)|$.
1. On considère la fonction F de E dans E définie par $F(\varphi)=\varphi^2$. Montrez que F est différentiable et explicitez la différentielle $DF(\varphi)$ de F au point $\varphi\in E$.
Explicitez ensuite l'application différentielle $DF : E\to E$.
2. Traitez la même question avec $F(\varphi)=f\circ\varphi$ où f est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II. Fonctions implicites - Inversion

Exercice 10. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) &= x + 2x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0\,, \\ \\ f(0) &= 0\,. \end{cases}$$

1. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 1$. Montrez que $Df(0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrez que f n'est injective sur aucun voisinage de 0.
3. Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 11. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

1. Déterminez l'image de $\mathbb{R}^2$ par f.
2. Montrez que f définit un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$?
4. Mêmes questions avec l'application $g : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

Exercice 12. **1.** Montrer que l'ensemble $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\ x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$ est, au voisinage de $(0, 1)$, le graphe d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 13. Soit $P_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k^0 X^k \in \mathbb{R}[X]$ admettant une racine simple α_0.
1. Montrer qu'il existe un voisinage U de $(a_0^0, \ldots, a_n^0)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que pour tout $(a_0, \ldots, a_n) \in U$, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ admet une unique racine simple α.
2. Quelle est la dépendance de α par rapport à $(a_0, \ldots, a_n)$?

Exercice 14. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes.
1. On considère l'application Φ de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ définie par : $\Phi(M) = M^2$. Montrez que Φ est différentiable sur $M_n(\mathbb{C})$ et explicitez l'application différentielle $D\Phi$. Pourquoi ne précise t-on pas la norme choisie sur $M_n(\mathbb{C})$?
2. Montrer qu'il existe une fonction différentiable F, définie dans un voisinage U de la matrice I_n, telle que $F(X)^2 = X$, pour tout $X \in U$.
3. On suppose que $n = 2$. Soit $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $DF(X).J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
4. Même question avec l'application Ψ définie par $\Psi(M) = M^3$.

Exercice 15. On note S l'espace des matrices carrées symétriques $n \times n$ à coefficients réels. Etant donnée $A_0 \in S$ on appelle Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans S définie par $\Phi(M) =^t MA_0M$.
1. Montrez que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculez $D\Phi(Id)$.
2. Déterminez le noyau et l'image de $D\Phi(Id)$.
3. On note E l'espace des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_0M \in S$ et l'on note $\overline{\Phi}$ l'application Φ restreinte à E. Quel est le noyau et l'image de $D\overline{\Phi}$?
4. Montrez qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de A_0 dans S tel que toute matrice $A \in \mathcal{U}$ s'écrit sous la forme $A =^t MA_0M$, pour une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que l'on peut choisir M dépendant de manière $\mathcal{C}^1$ de la matrice A dans $\mathcal{U}$ (c'est-à-dire qu'il existe une application Ψ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \Psi(A)$, pour tout $A \in \mathcal{U}$).

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$||f(x) - f(y)|| \geq k||x - y||.$$

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$||Df(x)(h)|| \geq k||h||.$$

3. En déduire que $Df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

4. Montrer que f est localement inversible en tout point de $\mathbb{R}^n$, i.e. que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un ouvert U contenant x tel que f soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $f(U)$.

5. Montrer que f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
(On pourra montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé.)

Exercice 17.

1. Soit N une norme sur un espace vectoriel. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne notée $|| \cdot ||$.

2. Montrer que l'application $N_2 : x \mapsto ||x||$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et calculer sa différentielle.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et F l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $F(x) = f(||x||)x$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle DF(x)(h), h\rangle \geq f(||x||)||h||^2.$$

5. Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

III. Extrema - Extrema liés

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = (a|x) \exp(-\|x\|^2).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que la différentielle de f en $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, Df(x).h = [(a|h) - 2(a|x)(x|h)] \exp(-\|x\|^2).$$

Ici $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer les points critiques de f, c'est-à-dire les points x de $\mathbb{R}^n$ tels que $Df(x) = 0$.

3. Déterminer les éventuels maxima et minima de f.

Exercice 19. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $U = (]0, +\infty[)^n$ et f l'application de U dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n + \alpha^{n+1} \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$$

où α est un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (on calculera les dérivées partielles de f).

2. Déterminer le point critique de f et préciser sa nature (maximum, minimum, point selle).

Exercice 20. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ on note :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Soit U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, à valeurs réelles. On suppose que $\Delta f(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in U$.

Montrer que f ne peut pas avoir de maximum sur U (on pourra raisonner par l'absurde en considérant un point (x_0, y_0) de U où un maximum serait atteint et introduire les fonctions $f_1 : t \mapsto f(x_0 + t, y_0)$ et $f_2 : t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$).

Exercice 21. Soit $a > 0$ et S la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = a, \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

La fonction $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xyz$ admet-elles des extrema sur S ? Si oui, les déterminer.

Exercice 22. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de E : $\mathbb{S}^n = \{x \in E / < x, x >= 1\}$.

1. Montrer que l'application $f : x \in E \longmapsto < u(x), x > \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = \sup_{x \in \mathbb{S}^n} f(x)$.

3. En déduire que x_0 est un vecteur propre de l'endomorphisme u.

4. Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Exercice 23. Soit $f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 \cdots x_n$ et $g : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 + \cdots + x_n$.

Pour $s > 0$, on définit $K_s := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n / \ g(x) = s\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in K_s$: $f(x) \leq f(s/n, \ldots, s/n)$.

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \geq 1, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n, \ (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$