Quelques thèmes en algèbre linéaire

Parties du programme abordées :

3. Algèbre générale *: Division euclidienne.*
4 Groupes et géométrie *: Générateurs d'un groupe.*
5 Algèbre linéaire *: Espaces quotients. Opérations élémentaires. Dualité.*

Références
FRANCINOU, GIANELLA, *Exercices X-ENS, Algèbre 1.*
FRANCINOU, GIANELLA, *Exercices X-ENS, Algèbre 2.*
GOURDON, *Math en tête - Algèbre.*
GRIFONE, *Algèbre linéaire.*

Dans cette feuille, $\mathbb{K}$ désigne un corps. On identifie les matrices de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ à des applications linéaires de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $M_{m,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 1 *Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes d'une matrice et rang.*

On appelle *opérations élémentaires* sur les colonnes (resp. les lignes) d'une matrice les opérations suivantes :
— une permutation de deux colonnes (resp. deux lignes),
— la multiplication d'une colonne (resp. une ligne) par un scalaire non nul,
— l'ajout à une colonne (resp. une ligne) d'une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} A$ n'est pas modifié si on effectue une opération élémentaire sur les colonnes de A.

2. Montrer que $\operatorname{Ker} A$ n'est pas modifié si on effectue une opération élémentaire sur les lignes de A.

3. En déduire que :

a. le rang de A n'est pas changé si on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes de A.

b. la matrice A et sa transposée ${}^tA$ ont même rang.

Exercice 2 *Générateurs du groupe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant ± 1. On note $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant 1.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est exactement l'ensemble des matrices inversibles de l'anneau $M_2(\mathbb{Z})$.

On veut montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier que $S, T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et trouver leurs inverses. Calculer S^2 et T^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

3. Montrer que si $c = 0$, alors M est (dans le sous-groupe) engendré par S et T.

4. Montrer que a et c sont premiers entre eux.

5. Calculer SM et $T^n M$ pour tout entier n.

6. En déduire, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, que M est engendré par S et T.

7. Écrire $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ comme produit de $S^{\pm 1}$ et $T^{\pm 1}$.

8. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que S et S' sont d'ordre fini mais que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal infini.

Exercice 3 *Transposée d'une matrice et d'une application linéaire (rappel de cours)*

On rappelle que le dual E^* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est l'ensemble des formes linéaires sur E. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de même dimension que E lorsque E est de dimension finie (par les bases duales). Si $f : E \to F$ est une application linéaire, sa *transposée* est l'application ${}^t f : F^* \to E^*$ définie par ${}^t f(u) = u \circ f$ pour toute forme linéaire $u \in F^*$.

1. Vérifier que pour toute application linéaire f, l'application ${}^t f$ est linéaire, et que si f, g sont des applications linéaires qui se composent, alors ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

2. Soient E, F des espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que dans des bases bien choisies, la matrice de ${}^t f$ est la transposée de la matrice de f.

Exercice 4 *Avec ou sans dualité ? Triangulation des matrices.*

Le but de cet exercice est de comparer deux preuves du théorème de triangulation des matrices.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On dit que f est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.

1. Montrer que si f est trigonalisable, la matrice de f peut être rendue triangulaire supérieure ou trangulaire inférieure par changement de base.

On dit qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est *scindé* s'il est produit de polynômes de degré 1. Le but de cet exercice est de montrer de deux façons différentes que f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

2. (le sens facile) Montrer que si f est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé.

Il reste à montrer la réciproque. On suppole désormais que le polynôme caractéristique de f est scindé.

La preuve classique [*Gourdon, Tauvel, Grifone...*] : une droite invariante et son supplémentaire.

3. Montrer que f possède une droite invariante. En déduire l'existence d'une base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que $\mathrm{mat}_{(e_1,...,e_n)} f = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ où $\lambda \in K$, $L \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. Montrer que le polynôme caractéristique de B est scindé et conclure par récurrence.

La preuve par transpositon [*Goblot, Gourdon,...*] : un hyperplan invariant et son supplémentaire.
Soit ${}^t f : E^* \to E^*$ la transposée de f.

5. Montrer que f et ${}^t f$ ont même polynôme caractéristique.

6. Montrer que ${}^t f$ possède un vecteur propre et en déduire un hyperplan H de E stable par f.

7. Montrer que le polynôme caractéristique de $f_{|H}$ est scindé et conclure par récurrence.

Exercice 5 *Des espaces isomorphes*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $F^\perp$ l'ensemble des formes linéaires sur E qui sont nulles sur F :

$$F^\perp = \{u \in E^* \mid \forall x \in F,\ u(x) = 0\} = \{u \in E^* \mid F \subset \mathrm{Ker}\, u\}.$$

Soit G un supplémentaire de F dans E. Montrer que les espaces vectoriels G, E/F et $F^\perp$ sont isomorphes et trouver des isomorphismes naturels entre les espaces suivants :

a. G et E/F

b. F^* et $E^*/F^\perp$

c. G et $F^\perp$ dans le cas où E est euclidien et G est le supplémentaire orthogonal à F.

Exercice 6 *Avec ou sans quotient ? Intersection de sous-espaces vectoriels*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $F_1, ..., F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer de deux manières différentes que si $\sum_{i=1}^k \dim F_i > n(k-1)$, alors $\cap_{i=1}^k F_i \neq \{0\}$:

1. en utilisant une application $\phi : F_1 \times \cdots \times F_k \to E^{k-1}$ dont le noyau est isomorphe à $\cap_{i=1}^k F_i$,

2. en utilisant une application $\psi : E \to E/F_1 \times \cdots \times E/F_k$ dont le noyau est $\cap_{i=1}^k F_i$.