**DEVELOPPEMENTS EULERIENS-APPLICATIONS**

# 1 Développement en série entière d'un inverse : Nombres de Bernoulli et nombres d'Euler

Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} S : & D(O,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$$

où $D(O,R) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\}$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $a_{p,n} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_n}$.

1. Montrer que si $z \in D(O,R)$ alors la série $\sum a_{p,n} z^n$ converge absolument et que :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n} z^p = (S(z))^n$$
2. On suppose que $a_0 = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < 1$ et, en déduire que si $|z| \leq r$ alors la suite double $(a_{p,n} z^p)_{p,n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
   (b) en déduire que la fonction :
$$\begin{array}{ccc} D(O,r) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{1-S(z)} \end{array}$$
   est développable en série entière.
3. Montrer que les fonctions :
$$\begin{array}{rccc} u : & D(O,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \begin{cases} \frac{z}{e^z-1} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases} \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccc} v : & D(O,\frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{ch(z)} \end{array}$$
   sont développables en séries entières.

*On appelle $b_n = u^{(n)}(0)$ le nème nombre de Bernoulli et $E_n = v^{(n)}(0)$ le nème nombre d'Euler*

4. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in D(O, \delta)$ :

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \text{ et } v(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2n \\ 2k \end{pmatrix} E_{2k} = 1$$

5. (a) Calculer $E_0$, $E_2$ et $E_4$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$ et calculer $b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_4$ et $b_6$.

# 2 Développement eulerien de la fonction cotangente - Calcul de $\zeta(2k)$

Soient les fonctions $f, g$ et $D$ définies sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ par :

$$f(x) = \pi \cot(\pi x)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$$

$$D = f - g$$

6. Justifier la définition de la fonction $g$ et montrer que les fonctions $g$ et $D$ sont impaires, périodiques depériodes 1 et continues sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} f(\frac{x}{2}) + f(\frac{1+x}{2}) = 2f(x) \\ g(\frac{x}{2}) + g(\frac{1+x}{2}) = 2g(x) \end{cases}$$

8. Montrer que la fonction $D$ se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{D}$ sur $\mathbb{R}$. On note $M = \max_{t\in[0;1]}(\tilde{D}(t))$ et soit $\alpha \in [0; 1]$ tel que $\tilde{D}(\alpha) = M$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\tilde{D}(\frac{\alpha}{2^n}) = M$ et en déduire que la fonction $\tilde{D}$ est nulle, puis que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ :

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}$$

9. Montrer que $\forall x \in ]-\pi;\pi[$ :

$$x\cot(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k}$$

Et en déduire que

$$\frac{i2x}{e^{i2x} - 1} = 1 - ix - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k}$$

10. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\zeta(2n) = (-1)^n \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\ b_{2n}$$

Calculer $\zeta(2), \zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

# 3 Développement euleurien de la fonction sinus - Formule du complément

Soit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$P_n : \begin{cases} ]-1;1[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - \frac{x^2}{k^2}) \end{cases}$$

11. Montrer que $\forall x \in ]-1;1[$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$.

    Pour $x \in ]-1;1[$, on note $P(x) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{k^2}) = \lim_{n\to+\infty}(P_n(x))$.

12. Montrer que $\forall x \in ]-1;1[$: $\ln(P(x)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1-\frac{x^2}{k^2})$ et en déduire que lafonction $P$ est de classe $C^1$ et que

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

13. En déduire que $\forall x \in ]-1;1[$ :

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - \frac{x^2}{k^2})$$

Soit

$$\Gamma : \begin{cases} ]0;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \end{cases}$$

la fonction Gamma d'Euler

14. Montrer que $\forall x > 0$ :

$$\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1}dt \longrightarrow_{n\to+\infty} \Gamma(x)$$

15. Montrer que $\forall x > 0$ :

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

et, en déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)})$$

16. En déduire que $\forall x \in ]0;1[$ :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

# 4 Développement eulerien de la fonction $\frac{1}{\cos(x)}$ : calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$

17. Pour quelles valeurs de réels $x$ la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^{x-1}}{1+t} \end{array}$$

est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$.

18. Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$ :

i.
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-u(1+v)} v^{x-1} dv \right) du.$$

ii. Montrer que la fonction $h$ :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \int_0^{+\infty} \left( \int_0^y e^{-u(1+v)} v^{x-1} dv \right) du \end{array}$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ et que
$$h'(y) = \frac{y^{x-1}}{1+y}.$$

iii. En déduire que pour tout $x \in ]0,1[$ :
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

19. En déduire que pour tout $x \in ]0,1[$ :
$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t} dt$$
puis que :
$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

20. En déduire que pour tout $x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ :
$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1/2)^2 - x^2}$$
puis que pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ :
$$\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} x^{2k}$$

21. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}$$
Calculer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5}$$