Agrégation Interne

Formes quadratiques réelles et ellipsoïdes

M. Alessandri. *Thèmes de géométrie. Groupes en situation géométrique.* Dunod. 1999.

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas. *Oraux X-ENS. Algèbre 3.* Cassini (2008).

X. Gourdon. *Les Maths en tête. Algèbre.* Ellipses (2004).

J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).

J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L3.* Dunod. (2015).

J. E. Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* deboeck supérieur (2017).

J. E. Rombaldi. *Exercices et problèmes corrigés pour l'agrégation de mathématiques.* deboeck supérieur (2018).

G. Skandalis. *Agrégation interne. Analyse.* Calvage et Mounet (2018).

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles respectivement formés des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, des matrices réelles d'ordre n orthogonales, des matrices symétriques réelles d'ordre n, des matrices symétriques réelles positives d'ordre n et des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n.

Pour tous réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, on note :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $I_n = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1)$ est la matrice identité d'ordre n.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle avec le produit scalaire défini par $\langle X \mid Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ pour tous $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que :

— les mineurs principaux d'une matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les déterminants des matrices carrées extraites $A_k = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq k}$ où k est un entier compris entre 1 et n ;

— une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive [resp. définie positive] si $\langle X \mid AX \rangle \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ [resp. $\langle X \mid AX \rangle > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$].

Pour tout espace vectoriel réel E de dimension $n \geq 1$, on note $Q(E)$, $Q^+(E)$ et $Q^{++}(E)$ les ensembles respectivement formés des formes quadratiques réelles sur E, des formes quadratiques réelles positives sur E et des formes quadratiques réelles définies positives sur E.

On rappelle qu'une forme quadratique $q \in Q(E)$ est dite positive [resp. définie positive] si $q(x) \geq 0$ [resp. $q(x) > 0$] pour tout $x \in E$ [resp. $x \in E \setminus \{0\}$].

Étant donnée une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E, on associe à tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ le vecteur colonne $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ formé des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$. L'application $x \mapsto X$ réalise un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.

Soient E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et q une forme quadratique sur E de matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - (a) *q est positive [resp. définie positive] ;*
   - (b) *A est positive [resp. définie positive] ;*
   - (c) *toutes les valeurs propres de A sont positives [resp. strictement positives] ;*
   - (d) *il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [resp. $B \in GL_n(\mathbb{R})$] telle que $A = {}^tBB$;*
   - (e) *il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ [resp. $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$] telle que $A = B^2$ (B est la racine carrée de A et elle est notée $\sqrt{A}$).*
2. *On suppose que la matrice A est à diagonale dominante (i.e. $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ pour tout i compis entre 1 et n) [resp. strictement dominante (i.e. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ pour tout i compis*

entre 1 et n)]. Montrer que A est positive [resp. définie positive] si, et seulement si, $a_{ii} \geq 0$ [resp. $a_{ii} > 0$] pour tout i compris entre 1 et n.

3. *Montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ [resp. $A = S\Omega$] où Ω est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive (décomposition polaire).*

4.

   (a) *Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de réels strictement positifs et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Montrer que $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i$.*

   (b) *Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. En déduire que $\sqrt[n]{\det(A)} \leq \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n}$.*

   (c) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En notant $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A, montrer que $(\det(A))^2 \leq \prod_{i=1}^{n} {}^tC_iC_i$, ce qui s'écrit aussi $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n}\|C_i\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ (inégalité d'Hadamard).*

5. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *A est définie positive ;*

   (b) *tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.*

Exercice 2.

E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme N' définie par $N'(A) = \sup_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$ pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'espace vectoriel $Q(E)$ est muni de la norme N définie par $N(q) = \sup_{\|x\|=1}|q(x)|$ pour toute forme quadratique $q \in Q(E)$.

1. *Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [resp. $Q^{++}(E)$] est un ouvert convexe de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), N')$ [resp. $(Q(E), N)$].*
2. *Montrer que $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ [resp. $Q^{+}(E)$] est un fermé convexe de $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), N')$ [resp. $(Q(E), N)$] et que son intérieur est $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ [resp. $Q^{++}(E)$].*

Exercice 3.

L'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme N' définie par $N'(A) = \sup_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$ pour toute matrice $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. *Soient $a < b$ deux réels et $A : [a,b] \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une application continue. Montrer que la matrice $B = \int_a^b A(t)\,dt$ est symétrique positive. Dans le cas où il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $A(t_0)$ soit définie positive, montrer que B est définie positive.*

2. *Montrer que la matrice* $B = \left(\left(\dfrac{1}{1+|j-i|}\right)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ *est symétrique définie positive.*

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$. On se propose de montrer que, pour toutes formes quadratiques $q_0 \in Q^{++}(E)$ et $q \in Q(E)$, il existe une base de E qui est q_0-orthonormée et q-orthogonale. Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E. Pour $n = 1$, le résultat est évident. Supposant le résultat acquis au rang $n-1$, on se donne deux formes quadratiques $q_0 \in Q^{++}(E)$ et $q \in Q(E)$.

1. *En notant $S(q_0) = \{x \in E \mid q_0(x) = 1\}$, justifier l'existence d'un vecteur $e_1 \in S(q_0)$ tel que $q(e_1) = \sup\limits_{x\in S(q_0)} q(x)$. On notera $D_1 = \mathbb{R}e_1$ la droite vectorielle dirigée par e_1.*
2. *En notant $\lambda_1 = q(e_1)$, montrer que la forme quadratique $q_1 = \lambda_1 q_0 - q$ est positive, puis que e_1 est dans le noyau de q_1.*
3. *Désignant par φ_0 la forme polaire de q_0 et $H_1 = \{x \in E \mid \varphi_0(x, e_1) = 0\}$ l'orthogonal de la droite D_1 relativement à q_0, montrer que $E = D_1 \oplus H_1$ et conclure.*
4. *Montrer que pour toutes matrices symétriques réelles $A_0 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPA_0P = I_n$ et ${}^tPAP$ est diagonale (théorème de réduction simultanée).*
5. *Soient $A \neq B$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\forall t \in]0,1[,\ \det(tA + (1-t)B) > (\det(A))^t (\det(B))^{1-t}$$

(la fonction det *est strictement logarithmiquement concave sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$). En déduire que la fonction $\dfrac{1}{\det}$ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Exercice 5.

Pour $n \geq 2$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, $\mathcal{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ est la boule unité correspondante et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. À toute forme quadratique $q \in Q(\mathbb{R}^n)$, on associe l'ensemble $\mathcal{E}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$. Dans le cas où q est définie positive, on dit que $\mathcal{E}(q)$ est un ellipsoïde (ou plus précisément l'intérieur d'un ellipsoïde centré en 0).

1. *On se propose de montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde si, et seulement si, c'est l'image de la boule unité $\mathcal{B}_n$ par un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.*
   (a) *Soient $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ de matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}(q)$ l'ellipsoïde associé. En notant v l'automorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $\sqrt{A}$ dans la base $\mathcal{B}$ (question **1** de l'exercice 1), montrer que $\mathcal{E}(q) = v^{-1}(\mathcal{B}_n)$.*
   (b) *Soit $\mathcal{E} = u(\mathcal{B}_n)$ l'image de $\mathcal{B}_n$ par un automorphisme $u \in GL(\mathbb{R}^n)$ de matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$. En utilisant la décomposition polaire $A = S\Omega$ où $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{E}(q)$, où $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ est la forme quadratique de matrice $\left(S^{-1}\right)^2$ dans la base $\mathcal{B}$.*
2. *Soient q, q' deux formes quadratiques définies positives de matrices respectives A, A' dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Montrer que les valeurs propres de* $A^{-1}A'$ *sont strictement positives (on peut utiliser le théorème de réduction simultanée).*

(b) *On suppose que* $q' \leq q$. *Montrer que* $\mathcal{E}(q) \subset \mathcal{E}(q')$, *que les valeurs propres de* $A^{-1}A'$ *sont dans l'intervalle* $]0,1]$ *et que* $\det(A') \leq \det(A)$.

(c) *Montrer que* $\mathcal{E}(q) = \mathcal{E}(q')$ *si, et seulement si,* $q = q'$.

3. *Pour tout entier* $n \geq 2$, *on note* V_n *le volume de la boule euclidienne* $\mathcal{B}_n$ *de* $\mathbb{R}^n$. *Pour* $n = 0$ *et* $n = 1$, *on note* $V_0 = 1$ *et* $V_1 = 2$.

(a) *En désignant par* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite des intégrales de Wallis, montrer que pour tout entier* $n \geq 1$, *on a* $V_n = 2V_{n-1}W_n$.

(b) *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 0$, *on a* $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$, *puis en déduire que :*

$$V_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^p}{p!} \text{ si } n = 2p \\ \dfrac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}\pi^p \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

4. *Soient* $q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ *de matrice* $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{E}(q)$ *l'ellipsoïde associé.*

(a) *En désignant par* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *les valeurs propres distinctes ou confondues de* A, *montrer que le volume de* $\mathcal{E}(q)$ *est* $V(q) = \dfrac{V_n}{\sqrt{\det(A)}} = \dfrac{V_n}{\sqrt{\prod\limits_{1\leq i\leq n}\lambda_i}}$.

(b) *En utilisant le résultat de la question précédente, retrouver le fait que si* $q' \in Q^{++}(\mathbb{R}^n)$ *de matrice* $A' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{B}$ *est telle que* $q' \leq q$, *on a alors* $\det(A') \leq \det(A)$.

(c) *En utilisant une expression réduite de* q *dans une base orthonormée de de* $\mathbb{R}^n$ *de la forme* $q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i^2}{a_i^2}$, *donner une expression de* $V(q)$.

(d) *Montrer que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(A)}}$ *et* $V(q) = \dfrac{V_n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}dx$.

(e) *Montrer que l'application* $V : q \in Q^{++}(\mathbb{R}^n) \mapsto V(q) \in \mathbb{R}^{+,*}$ *est continue et strictement convexe. Retrouver la stricte convexité de la fonction* $\dfrac{1}{\det}$ *sur* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *(question* ***5*** *de l'exercice 4).*