Agrégation Interne

Polynômes de Legendre. Séries de Fourier-Legendre

$\mathcal{C}^0([-1,1])$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}^n([-1,1])$ est l'algèbre des fonctions n fois continûment dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ est l'algèbre des fonctions indéfiniment dérivables de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[x]$ est la sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ formée des fonctions polynomiales et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus égal à n.

– I – Résultats préliminaires

Si $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, est continue par morceaux, on notera en tout point de discontinuité a de f :

$$f\left(a^-\right) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ (pour } a > -1) \text{ et } f\left(a^+\right) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ (pour } a < 1)$$

On note $\mathcal{E}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues par morceaux de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(-1) = f(-1^+)$, $f(1) = f(1^-)$ et en tout point $a \in]-1,1[$ où f est discontinue on ait $f(a) = \dfrac{1}{2}\left(f(a^-) + f(a^+)\right)$.
Pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{E}$, on note :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,\ \|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$$

1. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \langle f \mid g \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
2. Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est dense dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$, puis que l'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^n([-1,1])$, on a :

$$\left\langle f^{(n)} \mid g \right\rangle = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-1-k)} g^{(k)}\right]_{-1}^{1} + (-1)^n \left\langle f \mid g^{(n)} \right\rangle$$

   (formule d'intégrations par parties itérées).
4. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $W_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx$.

– II – Polynômes de Legendre

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par π_{2n} et L_n les fonctions polynomiales définies par :

$$\pi_{2n}(x) = \left(x^2 - 1\right)^n \text{ et } L_n = \frac{1}{2^n n!} \pi_{2n}^{(n)}$$

1.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est un polynôme de degré n de même parité que n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $L_n(0)$ ainsi que les coefficients de x^n et x^{n-1} dans L_n.

(b) En utilisant la formule de Leibniz, calculer pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$, $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$ (pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$). Calculer $\|L_n\|$.

(d) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n admet n racines réelles simples $x_{n,1} < \cdots < x_{n,n}$ dans l'intervalle $]-1,1[$.

(e) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels strictement positifs $\lambda_{n,1}, \cdots, \lambda_{n,n}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, on ait $\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{n,k}P(x_{n,k})$.

2. Pour $(x,r) \in [-1,1]\times\mathbb{R}^{+,*}$, on désigne par $\gamma_{x,r}$ le lacet défini par $\gamma_{x,r}(t) = x + re^{it}$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

(a) $L_n(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_{x,r}} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\frac{dz}{2^n}$ (*formule intégrale de Schläffi*) ;

(b) $L_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin(t)\right)^n dt = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right)^n dt$ (*formule intégrale de Laplace*).

3. En utilisant la formule intégrale de Laplace, calculer pour tout entier naturel n, $L_n(1)$, $L_n(-1)$ et $\|L_n\|_\infty$.

4. Montrer que, pour tout réel $\delta \in]0,1[$, la suite de fonctions polynomiales $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-\delta,\delta]$.

5.

(a) Montrer que :

$$\forall (x,t) \in [-1,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos(t)\right| \leq e^{-\frac{2}{\pi^2}\left(1-x^2\right)t^2}$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a $|L_n(x)| \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$.

(c) Retrouver le résultat de **II.4**.

6.

(a) Soit α un réel. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\alpha^2\cos^2(t)}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+i\alpha\cos(t)}$.

(b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in [-1,1]\times]-1,1[$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{y^2-2xy+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)\,y^n$.

7.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(n+1)L_{n+1}(x) + nL_{n-1}(x) = (2n+1)\,xL_n(x) \tag{1}$$

$$n(n+1)\left(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)\right) = (2n+1)\left(x^2-1\right)L_n'(x) \tag{2}$$

(b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tous réels x, t on a :

$$(x-t)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,L_k(x)\,L_k(t) = (n+1)\left(L_{n+1}(x)\,L_n(t) - L_n(x)\,L_{n+1}(t)\right)$$

(*formule de Darboux-Christoffel*).

8. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $x_n = \max\limits_{1\le k\le n} x_{n,k}$ la plus grande des racines de L_n.

(a) Vérifier que $0 < x_1 < x_2 < x_3$.

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

9.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que pour tout $(x,y) \in [-1,1]\times\,]-1,1[$, on ait $\dfrac{1}{y^2-2xy+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)\,y^n$, chaque polynôme T_n étant de degré n et de la parité de n.

(b) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 2x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\ \ (n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Préciser le coefficient dominant de T_n.

(c) Donner une expression simple de $\sin(\theta)\,T_n(\cos(\theta))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_n(x) = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$.

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) < x_n < 1$ (x_n est la plus grande des racines de L_n) et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

– III – Opérateur de Legendre

On définit l'opérateur de Legendre $\mathcal{L}$ sur l'espace $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R}),\ \mathcal{L}(f) = \left(x^2-1\right)f'' + 2xf'$$

1. Montrer que l'opérateur $\mathcal{L}$ est symétrique positif, c'est-à-dire que $\langle \mathcal{L}(f) \mid g\rangle = \langle f \mid \mathcal{L}(g)\rangle$ et $\langle \mathcal{L}(f) \mid f\rangle \ge 0$ pour toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $(x^2-1)\,\pi'_{2n}(x) = 2nx\pi_{2n}(x)$, puis en déduire que $\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)\,L_n$.

(b) En étudiant les variations, pour tout entier naturel n, de la fonction θ_n définie sur $[-1,1]$ par $\theta_n(x) = (L_n(x))^2 + \dfrac{(1-x^2)}{n(n+1)}\left((L'_n(x))^2\right)$, retrouver la valeur de $\|L_n\|_\infty$.

3. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$xL'_n - L'_{n-1} = nL_n,\ L'_{n+1} = L'_{n-1} + (2n+1)\,L_n = xL'_n + (n+1)\,L_n$$

4. Pour tout réel λ, on note $\mathcal{E}_\lambda = \ker(\mathcal{L} - \lambda I_d)$.
   (a) Déterminer l'ensemble Σ des réels λ tels que $\mathcal{E}_\lambda \neq \{0\}$.
   (b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \Sigma$, l'espace $\mathcal{E}_\lambda$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur.
5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \left(1 - x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2x\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

de la forme $u(t,x) = a(t)\,b(x)$ avec a de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et b de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$.

– IV – Séries de Fourier-Legendre

On désigne par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Legendre normalisés. Cette famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[x]$. À toute fonction $f \in \mathcal{E}$ on associe la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} = (\langle f \mid P_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficient de Fourier-Legendre et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,P_k$ la $n^{ème}$ somme partielle de la série de Fourier-Legendre de f.

1. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f - S_n(f)\| = \inf_{Q\in\mathbb{R}_n[x]} \|f - Q\|$ ($S_n(f)$ est la meilleure approximation pour la norme $\|\cdot\|$ de f par des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$).
2. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, la série de terme général $c_n^2(f)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f) \leq \|f\|^2$ (*inégalité de Bessel*), puis que $\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$ (*lemme de Riemann-Lebesgue*).
3. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, la série de fonctions $\sum c_n(f)\,P_n$ converge vers f dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ (*convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier-Legendre*). En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(f) = \|f\|^2$ (*égalité de Parseval*).
4. Montrer que deux fonctions f, g dans $\mathcal{E}$ sont égales si, et seulement si, elles ont les mêmes coefficients de Fourier-legendre.
5. Soit $f \in \mathcal{C}^1([-1,1])$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c_n(f) = \dfrac{c_{n-1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n-1)}} - \dfrac{c_{n+1}(f')}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$.
   (b) En déduire que la série de Fourier-Legendre de f converge simplement sur $]-1,1[$, la convergence étant uniforme sur tout segment $[-\delta,\delta]$ contenu dans $]-1,1[$.
6. Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a $S_n(f)(x) =$

$\int_{-1}^{1} K_n(t,x) f(t)\, dt$, où K_n est la fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{aligned} K_n(t,x) &= \sum_{k=0}^{n} P_k(t) P_k(x) \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}} \begin{cases} \dfrac{P_{n+1}(t) P_n(x) - P_n(t) P_{n+1}(x)}{t-x} & \text{si } t \neq x \\ P_n(x) P'_{n+1}(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) & \text{si } t = x \end{cases} \end{aligned}$$

7. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} K_n(t,x)\, dt = 1$.
8. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que si f admet une dérivée à droite et à gauche en un point $x \in]-1,1[$, on a alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) P_n(x)$.
9. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ vérifie une condition de Hölder de constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et d'exposant $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (i. e. $|f(t) - f(x)| \leq \lambda |t-x|^{\alpha}$ pour tout $t \in [-1,1]$), la série de Fourier-Legendre $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f) P_k$ converge alors simplement vers f sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$.
10. Calculer les coefficients de Fourier-Legendre de la fonction f définie sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-1,\alpha[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x = \alpha \\ 1 \text{ si } x \in]\alpha, 1] \end{cases}$$

où α est un réel strictement compris entre -1 et 1. Étudier la série de Fourier-Legendre correspondante.

11. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'application S_n est linéaire continue de $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ et que sa norme d'opérateur $N_\infty(S_n) = \displaystyle\sup_{f \in \mathcal{E}\setminus\{0\}} \frac{\|S_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$ est donnée par :

$$N_\infty(S_n) = \sup_{x \in [-1,1]} \int_{-1}^{1} |K_n(x,t)|\, dt$$