Agrégation interne ; CAER 2015

Deuxième épreuve

Olivier HALGAND

Partie I

1. (a) La fonction inverse étant continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty]$, on peut écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k},$$

et donc, par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}.$$

En sommant, on a alors :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

ce qui donne, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On obtient donc, d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et d'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n+1) \quad \text{d'où : } \forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n.$$

Cette dernière égalité étant trivialement vérifiée pour $n = 1$, on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n,$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n = u_n \leqslant 1.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in [0, 1].}$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

Or, on sait que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$ et donc : $\forall x \in]0, 1], \ln(1-x) \leqslant -x$. Avec $x = \frac{1}{n+1}$, on en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

2. (a) • Posons $f_s : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}$ pour $s > 0$. Ainsi, f_s est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et est donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

• Etude de la borne 0 : La fonction f_s est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Or :

$$f_s(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{s-1} \qquad \text{et :} \qquad \int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge } \Leftrightarrow s-1 > -1 \Leftrightarrow s > 0.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^1 f_s(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

• Etude de la borne $+\infty$: On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_s(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s+1} = 0$ par croissances comparées. On en déduit donc que $f_s(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_s(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

Finalement :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge si, et seulement si : } s > 0.}$$

• Posons $\Gamma_{a,b} : s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ (avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$). Effectuons une intégration par partie :

$$\forall s > 0, \quad \Gamma_{a,b}(s+1) = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\, t^s\Big]_a^b - \int_a^b -\mathrm{e}^{-x}\; sx^{s-1}\,\mathrm{d}x = \Big(\mathrm{e}^{-a}\, a^s - \mathrm{e}^{-b}\, b^s\Big) + s\int_a^b \mathrm{e}^{-x}\, x^{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Or : $\lim\limits_{a\to 0} \mathrm{e}^{-a}\, a^s = 0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} \mathrm{e}^{-b}\, b^s = 0$. Comme $\Gamma_{a,b}$ converge vers Γ lorsque a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall s > 0, \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s).}$$

• Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

Initialisation : Calculons $\Gamma(1)$:

$$\Gamma_{a,b}(1) = \int_a^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b} \underset{\substack{a\to 0\\ b\to+\infty}}{\longrightarrow} 1.$$

Donc : $\Gamma(1) = 1 = 0!$ et la propriété est initialisée.

Hérédité : On suppose que $\Gamma(n+1) = n!$ pour un entier naturel n donné. Alors :

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

et la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut en conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!}$$

(b) Par définition : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$. Effectuons le changement de variable : $t = \sqrt{x}$, avec : $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$. On obtient alors : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ 2\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

Calculons donc cette intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. On peut écrire, d'après le théorème de Fubini :

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

On effectue un changement de variables dans cette dernière intégrale en passant aux coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et alors $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Alors (toujours à l'aide du théorème de Fubini) :

$$I^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2}\ r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{+\infty} r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right) = \Big[-\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2}\Big]_0^{+\infty}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement, I étant positive : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc :

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.}$$

(c) Montrons que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Méthode 1 : avec la convergence uniforme : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\Gamma_n : s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_{\frac{1}{n}}^{n} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\, \mathrm{d}x.$$

Il est clair que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Justifions la continuité des fonctions Γ_n : la fonction $F : (s,x) \in [a,b]\times\mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-x}\, x^{x-1}$ est continue. Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe intégral, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma_n$ est contniue sur $[a,b]$.

• Montrons la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$: considérons deux réels a et b tels que : $0 < a < b$. Alors :

$$\forall s \in [a,b], \quad \Big|\Gamma_n(s) - \Gamma(s)\Big| = \int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\mathrm{d}x + \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\mathrm{d}x,$$

avec :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \leqslant x^{s-1}, \quad \text{donc :} \quad \int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} x^{s-1}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^s}{s}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{sn^s} \leqslant \frac{1}{an^a},$$

et :

$$1 \leqslant n \leqslant x \text{ et } s \leqslant b, \quad \text{donc :} \quad 1 \leqslant x^{s-1} \leqslant x^{b-1} \quad \text{et :} \quad 0 < \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{b-1}\mathrm{d}x.$$

D'où :

$$\forall s \in [a,b], \quad \Big|\Gamma_n(s) - \Gamma(s)\Big| \leqslant \frac{1}{an^a} + \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{b-1}\mathrm{d}x.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Γ sur $[a,b]$.

• Conclusion : la fonction Γ étant limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, elle est continue sur $[a,b]$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\Gamma \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Méthode 2 : avec la convergence dominée :

• Vérifions les hypothèses de continuités :
Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : s \mapsto \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $s > 0$, la fonction $f_s : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Démontrons l'hypothèse de domination : soient $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $s \in [a, b]$, on a :

$$x^{s-1} \leqslant x^{a-1} \text{ si } x \in]0, 1], \quad \text{et : } x^{s-1} \leqslant x^{b-1} \text{ si } x \geqslant 1.$$

On considère donc $\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}\, x^{a-1} & \text{si } x \in]0, 1] \\ \mathrm{e}^{-x}\, x^{b-1} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$. Alors φ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (même démonstration que pour f_s en **2.(a)**...). De plus :

$$\forall (s, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\right| \leqslant \varphi(x).$$

Conclusion : D'après le théorème de continuité sous le signe $\int$, on en déduit que Γ est continue sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et donc que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrons que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Méthode 1 : avec la convergence uniforme :

• Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Γ_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$: La fonction $F : (s, x) \mapsto \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{e}^{s \ln x}\, x^{-1}$ est continue sur $[a, b] \times \mathbb{R}_+^*$ et : $\dfrac{\partial F}{\partial s}(s, x) = (\ln x)\, F(s, x)$, donc $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ est continue sur $[a, b] \times \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit que $\Gamma_n \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in [a, b], \quad \Gamma_n'(s) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \ln x\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \mathrm{d}x.$$

• Montrons que, pour tout $s > 0$, $\Phi(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \mathrm{d}x$ converge : Par produit et composée, la fonction $x \mapsto (\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}$ est continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Etude de la borne 0 : On a l'équivalent suivant : $(\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \underset{x \to 0}{\sim} (\ln x) x^{s-1}$, or, une intégration par partie donne :

$$\int (\ln x) x^{s-1} \mathrm{d}x = \left[\ln x\, \frac{x^s}{s}\right] - \int \frac{1}{x}\, \frac{t^s}{s}\, \mathrm{d}x = \frac{(\ln x) x^s}{s} - \frac{x^s}{s^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 (\ln x) x^{s-1} \mathrm{d}x$ converge, et donc $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \mathrm{d}x$ converge aussi.

Etude de la borne $+\infty$: On a la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s+1} \ln x = 0$ par croissances comparées. On en déduit donc que $(\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\, \mathrm{d}x$ converge aussi.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln x) e^{-x} x^{s-1}\, \mathrm{d}x$ converge pour tout $s > 0$.

• Montrons que la suite $(\Gamma_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Φ sur $[a, b]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in [a, b], \quad \left|\Gamma_n'(s) - \Phi(s)\right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} |\ln x|\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \mathrm{d}x + \int_n^{+\infty} (\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \mathrm{d}x,$$

donc :

$$\left|\Gamma_n'(s) - \Phi(s)\right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} |\ln x|\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{a-1} \mathrm{d}x + \int_n^{+\infty} (\ln x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{b-1} \mathrm{d}x.$$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, le membre de droite (qui ne dépend pas de s) tend vers 0. Donc la suite $(\Gamma_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers Φ sur $[a, b]$.

• Conclusion : la suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers Γ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $(\Gamma'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ convergeant uniformément vers Φ sur $[a,b]$. On en déduit donc que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et : $\forall s\in[a,b], \Gamma'(s)=\Phi(s)$.

On en déduit donc que :

$$\boxed{\Gamma\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}^+) \qquad \text{et :} \qquad \forall s\in\mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}(\ln x)\,\mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}\mathrm{d}x.}$$

Méthode 2 : avec la convergence dominée :

• Vérifions les hypothèses de continuités :
Pour tout $x>0$, la fonction $f_x : s\mapsto \mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $s>0$, la fonction $f_s : x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Démontrons l'hypothèse de domination : On a : $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,x)=(\ln x)\,\mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}$. Ainsi, si on considère un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la fonction φ précédente, on a :

$$\forall (s,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}_+^*, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial s}(s,x)\right|\leqslant|\ln x|\,\varphi(x).$$

La fonction $\psi : x\mapsto|\ln x|\,\varphi(x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'elle est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$:

• Etude de la borne 0 : La fonction ψ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $]0,1]$:

$$\psi(x)=|\ln x|\;\mathrm{e}^{-x}\,x^{a-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{|\ln x|}{x^{a-1}} \text{ avec : } a-1>-1 \text{ donc : } \int_0^1\frac{|\ln x|}{x^{a-1}}\,\mathrm{d}x \text{ converge .}$$

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^1\psi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

• Etude de la borne $+\infty$: On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\psi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}|\ln x|\,\mathrm{e}^{-x}\,x^{b+1}=0$ par croissances comparées. On en déduit donc, comme en **2.(a)**,que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Conclusion : D'après le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, on en déduit que Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et donc que Γ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : On peut généraliser ce raisonnement et montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall s\in\mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}\ln^n x\;\mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}\mathrm{d}x.$$

(d) On sait que : $\forall t\in]-1,+\infty[, \ln(1+t)\leqslant t$. Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,n[, \quad -\frac{x}{n}\in]-1,0] \qquad \text{et :} \qquad \ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\leqslant-\frac{x}{n}.$$

On en déduit donc :

$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)=\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leqslant-x,$$

et donc :

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}^{-x}\,.$$

L'inégalité étant trivialement vérifiée pour $x=n$, on obtient bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,n], \quad \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\mathrm{e}^{-x}\,.}$$

De plus : $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{n\left(-\frac{x}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-x}$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}.}$$

(e) Soient $s>0$ et $\varepsilon \in]0,n[$; on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\mathrm{d}x &= \left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{x^s}{s}\right]_\varepsilon^n - \int_\varepsilon^n n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}x \\ &= \left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^n \frac{\varepsilon^s}{s} + \frac{n}{ns}\int_\varepsilon^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^s \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En faisant tendreε vers 0, on obtient alors :

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\mathrm{d}x = \frac{n}{sn}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^s \mathrm{d}x.$$

En itérant le procédé n fois, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\mathrm{d}x &= \frac{n(n-1)\dots 1}{s(s+1)\dots(s+n-1)}\int_0^n x^{s+n-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{sn\,(s+1)n\,\dots\,(s+n-1)n}\left[\frac{x^{s+n}}{s+n}\right]_0^n \\ &= \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n-1)\,n^n}\,\frac{n^{s+n}}{s+n}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\mathrm{d}x = \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}.}$$

(f) Considérons la suite de fonctions (g_n) définie par :

$$g_n : x \mapsto \begin{cases} x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x\in]0,n[\\ 0 & \text{si } x\in[n,+\infty[\end{cases}$$

• Soit $x>0$ fixé. Pour n assez grand, $x\in[n,+\infty[$ et donc :

$$g_n(x) = x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

• La suite (g_n) converge donc simplement vers la fonction $f_s : x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}$.

• De plus, les fonctions f_s et g_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, pour $x\in]0,n[$, on a :

$$|g_n(x)| = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}\,x^{s-1} \leqslant x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x} = f_s(x) \qquad \text{d'après } \textbf{I.2.(d)}.$$

Or, on a aussi : $|g_n(x)| \leqslant f_s(x)$ sur $[n,+\infty[$, si bien que cette majoration est vrai sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f_s étant intégrable, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n x^{s-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\forall s>0,\quad \Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}.}$$

(g) Posons, pour $s>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n=\dfrac{n!\,n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$. Alors : $v_n>0$ et :

$$\begin{aligned}\ln(v_N) &= \ln(N!)+\ln(N^s)-\ln\big[s(s+1)\dots(s+N)\big]\\ &= \sum_{n=1}^{N}\ln n + s\ln N - \ln s - \sum_{n=1}^{N}\ln(s+n)\\ &= -\ln s + s\ln N - \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{s+n}{n}\right)\\ &= -\ln s + s\left(\ln N - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{s}{n}-\ln\left(\frac{s+n}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

Or : $v_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(s)$, $\ln N - \sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma$ et : $\dfrac{s}{n}-\ln\left(\dfrac{s+n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{s^2}{2n^2}$ qui est une série à termes positifs convergente. On peut donc écrire :

$$\boxed{\forall s>0,\quad \ln\Gamma(s) = -\ln s - \gamma s + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{s}{n}-\ln\left(1+\frac{s}{n}\right)\right).}$$

(h) Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant 0$: $h_n : x\mapsto \dfrac{x}{n}-\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$. Alors h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad h_n'(x)=\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{x}{n(n+x)}.$$

Ainsi, pour tout $A>0$, et pour tout $x\in[0,A]$, on a : $\left|h_n'(x)\right|\leqslant\dfrac{A}{n^2}$, donc la série de fonctions $\sum h_n'$ converge normalement sur $[0,A]$. Or, d'après **I.2.(g)**, la série $\sum h_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la somme de cette série est dérivable sur $[0,A]$ et que sa dérivée est donnée par la somme de $\sum h_n'$. Ainsi, en dérivant l'expression précédente, on obient :

$$\forall s\in\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s}-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right),$$

ou encore, la série étant absolument convergente on peut changer l'ordre des termes :

$$\boxed{\forall s\in\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s-1}\right).}$$

Partie II

3. La suite $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée :

$$\exists m\in\mathbb{R}_+, \forall n\in\mathbb{N},\qquad 0<a_{n+1}-a_n\leqslant m.$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}F(a_n)=\ell$:

$$\exists p\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant p\Rightarrow\left|F(a_n)-\ell\right|<\varepsilon.$$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=0$ on a aussi :

$$\exists A>0, \forall x\in\mathbb{R}, x\geqslant A\Rightarrow\left|F'(x)\right|<\varepsilon.$$

En particulier, on peut choisir $A \geqslant a_p$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à un intervalle inclus dans $[A, +\infty[$:

$$\exists A \geqslant a_p > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \geqslant A \text{ et } y \geqslant A \Rightarrow \big|F(x) - F(y)\big| \leqslant \varepsilon |x - y|.$$

Or, puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$:

$$\forall x \geqslant a_p, \exists\, ! \, q \in \mathbb{N}, q \geqslant p, \qquad a_q \leqslant x < a_{q+1}.$$

Prenons alors $y = a_q$; on peut alors écrire (en utilisant l'inégalité triangulaire) :

$$\big|F(x) - \ell\big| \leqslant \big|F(x) - F(a_q)\big| + \big|F(a_q) - \ell\big| \leqslant \varepsilon |x - a_q| + \varepsilon < \varepsilon\big(a_{n+1} - a_n\big) + \varepsilon \leqslant \varepsilon(m+1).$$

Finalement, on a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow \big|F(x) - \ell\big| \leqslant \varepsilon(m+1),$$

où m est un réel fixé. On en déduit donc que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell.}$$

4. Par définition :

$$\forall s > 0, \quad F(s) = \ln \Gamma(s+1) + s - \left(s + \frac{1}{2}\right) \ln s.$$

Ainsi, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables, et :

$$\forall s > 0, \quad F'(s) = \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} + 1 - \ln s - \left(s + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{s} = \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} - \ln s - \frac{1}{2s}.$$

Or, d'après **I.2.(h)** :

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right) \quad \text{avec :} \quad \gamma = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right) - \ln N,$$

donc, d'après les opérations sur les séries à termes positifs :

$$\forall s > 0, \quad F'(s) = \lim_{N\to+\infty}\left[\left(\sum_{n=1}^{N} -\frac{1}{n}\right) + \ln N + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s}\right)\right] - \ln s - \frac{1}{2s},$$

d'où :

$$\forall s > 0, \quad F'(s) = \lim_{N\to+\infty}\left[\ln\frac{N}{s} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+s}\right] - \frac{1}{2s}.$$

Avec un changement d'indice, on obtient donc :

$$\boxed{\forall s > 0, \quad F'(s) = \lim_{n\to+\infty}\left[\ln\frac{n}{s} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}\right] - \frac{1}{2s}.}$$

5. D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que :

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\left[\ln\frac{n}{s} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}\right] \leqslant \ln\left(\frac{s+1}{s}\right).$$

Pour tout $s > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{s+x}$ est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; on peut donc utiliser une comparaison série-intégrale (comme en **1.(a)**) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+s} \geqslant \frac{1}{t+s} \geqslant \frac{1}{k+1+s},$$

et donc :

$$\frac{1}{k+s} = \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{k+s} \geqslant \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t+s} \geqslant \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{k+1+s} = \frac{1}{k+1+s}.$$

• On en déduit donc par somme de $k=0$ à $k=n$, et en utilisant la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+s}\geqslant\int_0^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t+s}\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s},$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+s}\geqslant\ln\left(\frac{n+1+s}{s}\right)=\ln\left(\frac{n}{s}\right)+\ln\left(1+\frac{s+1}{n}\right)\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}.$$

On obtient donc :

$$\ln\left(\frac{n}{s}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}\geqslant-\ln\left(1+\frac{s+1}{n}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, le terme de droite tend vers 0 et on obtient bien que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\frac{n}{s}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}\right]\geqslant 0.$$

• Reprenons le même encadrement mais sommons de $k=1$ à $k=n+1$; on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+s}\geqslant\int_1^{n+2}\frac{\mathrm{d}t}{t+s}\geqslant\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1+s},$$

soit, avec un changement d'indice :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}\geqslant\ln\left(\frac{n+2+s}{s+1}\right)=\ln\left[\left(\frac{n}{s}\right)\left(\frac{1+\frac{s+2}{n}}{1+\frac{1}{s}}\right)\right]=\ln\left(\frac{n}{s}\right)+\ln\left(\frac{1+\frac{s+2}{n}}{1+\frac{1}{s}}\right)\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2+s}.$$

On obtient donc :

$$-\ln\left(\frac{1+\frac{s+2}{n}}{1+\frac{1}{s}}\right)\geqslant\ln\left(\frac{n}{s}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, le terme de droite tend vers $-\ln\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{s}}\right)=\ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ et on obtient bien que :

$$\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\geqslant\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\frac{n}{s}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1+s}\right].$$

• Finalement, on a bien l'encadrement :

$$\boxed{\forall s>0,\quad -\frac{1}{2s}\leqslant F'(s)\leqslant\ln\left(\frac{s+1}{s}\right)-\frac{1}{2s}.}$$

6. On a évidemment : $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{1}{2s}=0$ et $\lim\limits_{s\to+\infty}\ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right)=0$. D'après le théorème des gendarmes, on peut donc déduire de l'encadrement précédent que : $\lim\limits_{s\to+\infty}F'(s)=0$.

Considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=n$. Alors cette suite est à termes strictement positifs, et elle est strictement croissante et de limite $+\infty$. Enfin, la suite $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à 1, donc bornée.

Enfin, d'après la formule de Stirling :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad F(a_n)=\ln\left(\frac{\Gamma(n+1)\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)=\ln\left(\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)=\ln\left(\sqrt{2\pi}\right).$$

D'après **II.3.**, on en déduit donc que : $\lim\limits_{s\to+\infty}F(s)=\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$, et donc que :

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\Gamma(s+1)\,\mathrm{e}^s}{s^{s+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi},$$

ou encore :

$$\boxed{\Gamma(s+1)\underset{s\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi}\,s^{s+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-s}.}$$

Partie III

7. $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii)}$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]-1,+\infty[$. Alors, la suite $(1+u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)$. On a évidemment : $P_n = \mathrm{e}^{S_n}$ et $S_n = \ln(P_n)$. Les fonctions ln et exp étant continues, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$\boxed{(i) \Leftrightarrow (iii)}$ Si un produit infini converge, alors son terme général tend vers 1. Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge et le produit infini $\prod(1+u_n)$ aussi.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant par hypothèse, les séries $\sum\ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature. D'après le point précédent, on a donc démontré :

$$\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+u_n) \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{+\infty}u_n \text{ converge.}}$$

8. **(a)** • Par hypothèse : $\forall k, N \in \mathbb{N}, |u_{k,N}| \leqslant a_k$, et : $\lim_{N\to+\infty} u_{k,N} = v_k$. On en déduit donc, par passage à la limite dans une inégalité, que : $\forall k \in \mathbb{N}, |v_k| \leqslant a_k$. Ainsi, $\sum a_k$ est une série majorante convergente de $\sum|v_k|$. Ainsi, la série $\sum|v_k|$ converge donc :

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum v_k \text{ converge.}}$$

• Considérons la suite de fonctions $f_N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [k, k+1[, f_N(x) = u_{k,N}$ si $k \leqslant N$, et $f_N(x) = 0$ si $x \geqslant N+1$. Alors :

$$u_{k,N} = \int_k^{k+1} u_{k,N}\,\mathrm{d}x \quad \text{donc :} \quad w_N = \sum_{k=0}^{N} u_{k,N} = \int_0^{N+1} f_N(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_N(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nous allons utiliser le théorème de convergence monotone :

◇ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et pour tout entier N, la fonction f_N est en escalier donc elle est continue par morceaux, et elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

◇ Déterminons la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors il existe $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ tel que : $x \in [k, k+1[$ et : $\forall N \geqslant k, f_N(x) = u_{k,N}$. Ainsi : $\lim_{N\to+\infty} f_N(x) = \lim_{N\to+\infty} u_{k,N} = v_k = v_{\lfloor x\rfloor}$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto v_{\lfloor x\rfloor}$. Cette fonction f est en escalier, donc continue par morceaux, sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que :

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_N(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} v_{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} v_{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} v_k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

donc :

$$\boxed{\text{la suite } (w_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sum_{k=0}^{\infty} v_k.}$$

(b) Nous allons appliquer la question précédente à une suite $w'_N = \sum_{k=0}^{N} u'_{k,N}$.

Or : $\exp\left(\sum_{k=0}^{N} u'_{k,N}\right) = \prod_{k=0}^{n} \exp(u'_{k,N})$; on pose donc : $\forall k, N \in \mathbb{N}, u'_{k,N} = \ln(1+u_{k,N})$, ce qui est possible car : $\forall k, N \in \mathbb{N}, u_{k,N} \in]-1,0]$ donc : $1+u_{k,N} \in]0,1]$.

• Puisque la suite $(u_{k,N})_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $v_k \in [-1,0]$, alors la suite $(u'_{k,N})_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers $v'_k = \ln(1+v_k) \in [-\infty, 0]$.

• De plus : $\forall k, N \in \mathbb{N}, |u_{k,N}| = -u_{k,N} \leqslant a_k$ avec $-u_{k,N} \in [0,1[$, donc : $1 > 1+u_{k,N} \geqslant 1-a_k$. Or, par hypothèse, $\sum a_n$ converge, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang n_0, on a : $0 \leqslant a_n < 1$ et donc : $1-a_n > 0$. En fait, quitte à changer les n_0+1 premiers termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\max\limits_{k\in[\![0,n_0]\!]}\{-u_{k,N}\}$, on peut supposer que : $1-a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 > \ln(1+u_{k,N}) \geqslant \ln(1-a_k) \quad \text{et ainsi :} \quad |u'_{k,N}| = \big|\ln(1+u_{k,N})\big| \leqslant \big|\ln(1-a_k)\big| = a'_k.$$

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}, -a_k \in]-1,0]$. Donc, d'après **7.**, puisque la série $\sum_{k=0}^{+\infty} -a_k$ converge, il en est de même de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1-a_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a'_k$.

• Les hypothèses pour appliquer la question **8.(a)** sont donc remplies : on en déduit donc que la suite $w'_N = \sum_{k=0}^{N} u'_{k,N} = \sum_{k=0}^{N} \ln(1+u_{k,N})$ converge vers $\sum_{k=0}^{+\infty} v'_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1+v_k)$. Donc, en appliquant la fonction exponentielle (qui est continue sur $\mathbb{R}$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\prod_{k=0}^{N}(1+u_{k,N})\right)_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \prod_{k=0}^{+\infty}(1+v_k).}$$

9. **(a)** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $1+|a_n| \geqslant 1$ et donc : $q_N \geqslant 1$. On peut donc écrire :

$$\ln(q_N) = \sum_{n=0}^{N} \ln(1+|a_n|) \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n|, \qquad \text{car : } \forall x \in]-2,+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x.$$

On en déduit donc (la fonction exponentielle étant croissante) :

$$\boxed{q_N \leqslant \exp\left(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\right).}$$

(b) Par récurrence :

• **Initialisation** : Pour $N=0$, on a : $|p_0 - 1| = |(1+a_0)-1| = |a_0| = (1+|a_0|)-1 = q_0 - 1$. La propriété est donc vérifiée pour $N=0$.

• **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vérifiée pour un entier N donné. Alors :

$$|p_{N+1}-1| = |p_N(1+a_{N+1}-1| = |(p_N-1)+p_N a_{N+1}| \underset{I.T.}{\leqslant} |p_N - 1| + |p_N a_{N+1}|.$$

Or, $|p_N| \leqslant q_N$ d'après l'inégalité triangulaire, et $|p_N - 1| \leqslant q_N - 1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc :

$$|p_{N+1}-1| \leqslant q_N - 1 + q_N|a_{N+1}| = q_N(1+|a_{N+1}|) - 1 = q_{N+1} - 1.$$

D'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \quad |p_N - 1| \leqslant q_N - 1.}$$

10. **(a)** Posons, pour tout entier n : $f_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ et $f = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$. Par hypothèse, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in N, n \geqslant n_0 \Rightarrow \forall x \in I, \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

donc, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées. Par exemple, $f_{n_0} - f$ est bornée. Mais, l'ensemble des fonctions bornées sur I est un espace vectoriel, et $f = f_n - (f_n - f)$ est une combinaison linéaire de fonctions bornées. Donc :

$$\boxed{f = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \text{ est bornée sur } I.}$$

(b) • Si $M = N$, c'est trivial. Supposons donc : $M \geqslant N+1$, et considérons $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum |u_n|$ converge uniformément, on peut utiliser le critère de Cauchy uniforme :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall M, N \text{ß} \mathbb{N}, M > N \geqslant n_0 \Rightarrow \forall x \in I, \sum_{k=N+1}^{M} |u_k(x)| =\leqslant \varepsilon,$$

et donc :

$$\forall M > N \geqslant n_0, \forall x \in I, \exp\left(\sum_{k=N+1}^{M} \big|u_k(x)\big|\right) - 1 \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon} - 1.$$

• D'autre part, d'après **9.(a)** et **(b)**, on a :

$$\left|\prod_{k=0}^{M}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \prod_{k=0}^{M}(1+|a_k|) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{k=0}^{M}|a_k|\right) - 1,$$

et avec $a_0 = \ldots = a_N = 0$:

$$\left|\prod_{k=N+1}^{M}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \prod_{k=N+1}^{M}(1+|a_k|) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{k=N+1}^{M}|a_k|\right).$$

• On peut donc écrire : $\forall M > N \geqslant n_0, \forall x \in I$,

$$\big|p_M(x) - p_N(x)\big| = \big|P_N(x)\big| \left|\prod_{k=N+1}^{M}\big(1+|u_k(x)|\big) - 1\right| \leqslant \big|P_N(x)\big| \left[\exp\left(\sum_{k=N+1}^{M}\big|u_k(x)\big|\right) - 1\right],$$

avec : $\forall k \in [\![N+1, M]\!], a_k = u_k(x)$, et donc :

$$\boxed{\forall M > N \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad \big|p_M(x) - p_N(x)\big| \leqslant \big|P_N(x)\big|\big(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1\big).}$$

(c) Posons $c = \sum_{k=0}^{+\infty}\big|u_k(x)\big|$. Alors, puisque pour tout $N \in \mathbb{N}, |p_N| \leqslant q_N \leqslant \mathrm{e}^c = C$, on a :

$$\forall M > N \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad \big|p_M(x) - p_N(x)\big| \leqslant C\big(\mathrm{e}^{\varepsilon} - 1\big).$$

Si on considère $\alpha : x \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - 2x$, alors α est dérivable et $\alpha'(x) = \mathrm{e}^x - 2 < 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Donc, α est strictement décroissante avec $\alpha(0) = -1$. Donc, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \alpha(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2x \leqslant 0$, et donc : $\mathrm{e}^x - 1 \leqslant 2x$.

On en déduit donc :

$$\boxed{\exists C > 0, \forall M > N \geqslant n_0, \forall x \in I, \quad \big|p_M(x) - p_N(x)\big| \leqslant 2C\varepsilon.}$$

(d) D'après la question précédente, on a donc :

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall M \geqslant N \geqslant n_0, \left\|p_M - p_N\right\|_\infty \leqslant 2C\varepsilon,$$

c'est-à-dire que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme : donc,

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ converge uniformément sur } I.}$$

11. **(a)** Par récurrence :

• **Initialisation** : Pour $n=1$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \sin\left(2\times\frac{t}{2}\right) = \sin t$. La propriété est donc vérifiée pour $n=1$.

• **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vérifiée pour un entier n donné. Alors :

$$\begin{aligned} 2^{n+1}\sin\frac{t}{2^{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}\cos\frac{t}{2^j} &= 2^n \times \left[2\sin\frac{\left(\frac{t}{2^n}\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{t}{2^n}\right)}{2}\right]\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{t}{2^j} \\ &= 2^n \times \left[\sin\frac{t}{2^n}\right]\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{t}{2^j} = \sin t \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sin t = 2^n \sin\frac{t}{2^n}\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{t}{2^j}.}$$

(b) Par récurrence :

• **Initialisation** : Pour $k=1$, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 1-2\sin^2 x$, donc $Q_1 = 1-2X$ et : $\deg(Q_1) = 1 = 2^{1-1}$. La propriété est donc vérifiée pour $k=1$.

• **Hérédité** : Supposons que la propriété soit vérifiée pour un entier k donné. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2^{k+1}x) = \cos(2\times 2^k x) = 2\cos^2(2^k x) - 1 \underset{H.R.}{=} 2\Big[Q_k(\sin^2 x)\Big]^2 - 1 = Q_{k+1}(\sin^2 x),$$

avec : $Q_{k+1} = 2Q_k^2 - 1$ et donc : $\deg(Q_{k+1}) = 2\times\deg(Q_k) = 2\times 2^{k-1} = 2^{(k+1)-1}$.

D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists Q_k \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \cos(2^k x) = Q_k(\sin^2 x) \text{ avec : } \deg(Q_k) = 2^{k-1}.}$$

(c) Soient $n \geqslant 2$ et $t \in \mathbb{R}\setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}$. Alors, $2^{-n}t \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et : $\sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{2^{-n}\sin t}{\sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t)} &= \frac{2^{-n}\times 2^n \sin(2^{-n}t)\prod_{j=1}^{n}\cos(2^{-j}t)}{\sin(2^{-n}t)\cos(2^{-n}t)} && \text{d'après } \mathbf{11.(a)} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1}\cos(2^{-j}t) = \prod_{j=1}^{n-1}\cos(2^{n-j}\times\underbrace{2^{-n}t}_{x}) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} Q_{n-j}\Big(\sin^2(2^{-n}t)\Big) && \text{d'après } \mathbf{11.(b)} \\ &= Q\Big(\sin^2(2^{-n}t)\Big) && \text{avec : } Q = \prod_{j=1}^{n-1}Q_{n-j} = \prod_{k=1}^{n-1}Q_k \end{aligned}$$

Or : $\deg Q_k = 2^{k-1}$ et donc :

$$\deg Q = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 1 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1} - 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe } Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} Q_k \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } 2^{n-1}-1 \text{ tel que :} \\ \\ \forall t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}, \quad \dfrac{2^{-n}\sin t}{\sin(2^{-n}t)\,\cos(2^{-n}t)} = Q\Big(\sin^2(2^{-n}t)\Big).\end{array}}$$

(d) Pour $p \in [\![1, 2^{n-1}-1]\!]$, posons : $\alpha_p = \sin^2(p\pi 2^{-n})$. Alors, en utilisant **11.(b)** :

$$Q(\alpha_p) = \prod_{k=1}^{n-1} Q_k\Big(\sin^2(p\pi 2^{-n})\Big) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos(2^k \times p\pi 2^{-n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{p\pi}{2^{n-k}}\right).$$

Ecrivons p sous la forme : $p = 2^m q$ avec q impair (écriture qui découle de la décomposition de p en produits de facteurs premiers). On a donc : $0 \leqslant m \leqslant n-2$ et donc : $1 \leqslant n-m-1 \leqslant n-1$, et :

$$Q(\alpha_p) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2^m q\pi}{2^{n-k}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{q\pi}{2^{n-k-m}}\right).$$

Or, le facteur pour $k = n-m-1$ (qui appartient bien à $[\![1, n-1]\!]$) est égal à : $\cos\left(\dfrac{q\pi}{2}\right) = 0$ car q est impair. Ainsi, $Q(\alpha_p) = 0$, c'est-à-dire que α_p est racine de Q. Or, il y a $2^{n-1}-1$ valeurs de α_p, deux à deux distinctes. Comme Q est de degré $2^{n-1}-1$, on en déduit qu'il possède au plus $2^{n-1}-1$ racines, et donc que :

$$\boxed{\text{les racines de } Q \text{ sont (exactement) les } \alpha_p = \sin^2(p\pi 2^{-n}), \text{ avec : } p \in [\![1, 2^{n-1}-1]\!].}$$

On a vu en **11.(b)** que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, Q_k(\sin^2 x) = \cos(2^k x)$. On en déduit donc que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, Q_k(0) = 1$, et donc : $Q(0) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} Q_k(0) = 1$. Si on écrit Q sous forme factorisée, on obtient :

$$Q = q_0 \prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} (X - \alpha_p) \qquad \text{et donc :} \qquad Q(0) = 1 = q_0 \prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} (-\alpha_p).$$

On peut donc écrire :

$$Q = \frac{q_0 \displaystyle\prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} (X - \alpha_p)}{q_0 \displaystyle\prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} (-\alpha_p)} = \prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{X-\alpha_p}{-\alpha_p}\right) = \prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{X}{\alpha_p}\right).$$

En évaluant Q en $\sin^2(2^{-n}t)$, on obtient donc, d'après **11.(c)** :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}, \quad \frac{2^{-n}\sin t}{\sin(2^{-n}t)\,\cos(2^{-n}t)} = \prod_{p=1}^{2^{n-1}-1} \left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(p\pi 2^{-n})}\right).}$$

(e) Pour $k, N \in \mathbb{N}$, on considère les réels $u_{k,N}$ définis par : $u_{k,N} = -\dfrac{\sin^2(2^{-N}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-N})}$ si $N \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant 2^{N-1}-1$; et $u_{k,N} = 0$ sinon, avec $t \in]0, 2k[$. Vérifions les hypothèses du **8.(b)**, ce qui nous permettra alors de conclure.

• Avec les équivalents : $u_{k,N} \underset{N\to+\infty}{\sim} -\left(\frac{2^{-N}t}{k\pi 2^{-N}}\right)^2 = -\frac{t^2}{(k\pi)^2}$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(u_{k,N}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $v_k = -\frac{t^2}{(k\pi)^2}$.

• Utilisons l'encadrement de concavité du sinus : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, ce qui nous donne : $\forall k, N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 2^N - 2[$,

$$\begin{array}{lccccc} & \frac{2}{\pi}\, k\pi 2^{-N} & < & \sin(k\pi 2^{-N}) & < & k\pi 2^{-N} \\ \text{donc :} & \frac{1}{k\pi 2^{-N}} & < & \frac{1}{\sin(k\pi 2^{-N})} & < & \frac{1}{2k.2^{-N}} \\ \text{et :} & \frac{2}{\pi}\, 2^{-N}t & < & \sin(2^{-N}t) & < & 2^{-N}t \\ \text{par produit :} & \frac{2t}{k\pi^2} & < & \frac{\sin(2^{-N}t)}{\sin(k\pi 2^{-N})} & < & \frac{t}{2k} \end{array}$$

D'où : $\forall k, N \in \mathbb{N}, \quad |u_{k,N}| < \frac{t^2}{4k^2} = a_k$, où la série $\sum a_k$ converge d'après le critère de Riemann.

• Enfin, d'après ce qui précède : $\forall k, N \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sin(2^{-N}t)}{\sin(k\pi 2^{-N})} < 1$ et donc : $0 \geqslant u_{k,N} > -1$.

On peut donc appliquer la question **8.(b)** :

$$\boxed{\text{la suite } \prod_{k=0}^{2^{N-1}-1}\left(1 - \frac{\sin^2(2^{-N}t)}{\sin^2(k\pi 2^{-N})}\right) \text{ converge, lorsque } N \to +\infty, \text{ vers } \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2}\right).}$$

De plus, d'après **11.(d)** :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2^{n-1}\pi\mathbb{Z}, \quad \frac{2^{-n}\sin t}{\sin(2^{-n}t)\,\cos(2^{-n}t)} = \prod_{p=1}^{2^{n-1}-1}\left(1 - \frac{\sin^2(2^{-n}t)}{\sin^2(p\pi 2^{-n})}\right),$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n}\sin t}{\sin(2^{-n}t)\,\cos(2^{-n}t)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n}\sin t}{2^{-n}t \times 1} = \frac{\sin t}{t}.$$

Cette égalité étant aussi vérifiée pour $t = 0$, car $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et, si $t = 2^{n-1}m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}^*$, alors : $\sin t = 0$ et :

$$1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2} = 1 - \frac{2^{2(n-1)}m^2\pi^2}{(k\pi)^2} = 0 \quad \text{pour : } k = 2^{n-1}m,$$

et donc le produit infini $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2}\right)$ est nul. Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\sin t}{t} = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{t^2}{(k\pi)^2}\right).}$$

12. D'après **2.(f)**, on a : $\forall s \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$. Donc, si $s \in]0, 1[$ alors $1 - s \in]0, 1[$ et on peut écrire :

$$\Gamma(1-s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{1-s}}{(1-s)(2-1)\dots(n+1-s)}.$$

Or :

$$s(s+1)(s+2)\dots(s+n) = s(1+s).2\left(1+\frac{s}{2}\right)\dots n\left(1+\frac{s}{n}\right) = s.n!\,(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\dots\left(1+\frac{s}{n}\right),$$

et de même :

$$(1-s)(2-s)\dots(n-s) = (1-s).2\left(1-\frac{s}{2}\right)\dots n\left(1-\frac{s}{n}\right) = n!(1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)\dots\left(1-\frac{s}{n}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^s \times n!n^{1-s}}{\left[s.n!\,(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\dots\left(1+\frac{s}{n}\right)\right]\left[n!(1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)\dots\left(1-\frac{s}{n}\right)\,(n+1-s)\right]}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{s(n+1-s)\,(1-s^2)\left(1-\left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{s}{3}\right)^2\right)\dots\left(1-\left(\frac{s}{n}\right)^2\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s\left(1+\frac{1-s}{n}\right)\times(1-s^2)\left(1-\left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{s}{3}\right)^2\right)\dots\left(1-\left(\frac{s}{n}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

Or, d'après **11.(e)** :

$$(1-s^2)\left(1-\left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{s}{3}\right)^2\right)\dots\left(1-\left(\frac{s}{n}\right)^2\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{s}{k}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall s\in\,]0,1[,\quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.}$$

13. **(a)** Pour tout $x>0$ et tout $n\geqslant 1$, on peut écrire :

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} = \exp\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right] \underset{+\infty}{=} \exp\left[\frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\right],$$

donc :

$$f_n(x) \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{x^2}{2n^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Or, d'après le critère de Riemann, la série $\sum \dfrac{x^2}{2n^2}$ converge donc, d'après les équivalences démontrées à la question **7.** :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge.}}$$

Considérons maintenant un compact $[a,b]$ de $]0,+\infty[$. Alors :

- les fonctions $f_n - 1$ sont continues, donc bornées, sur $[a,b]$;
- les fonctions $f_n - 1$ sont dérivables et :

$$(f_n-1)'(x) = -\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^2\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} + \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\times\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-2}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\left[-1+\left(1+\frac{x}{n}\right)\right] = \frac{x}{n^2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-2}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \geqslant 0.$$

Donc, les fonctions $f_n - 1$ sont croissantes sur $[a,b]$ et donc, sachant que $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = 1$: $\forall x \in [a,b],\quad 0 \leqslant f_n(x) - 1 \leqslant f_n(b) - 1$. Or, $f_n(b) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b^2}{2n^2}$, donc : $\sum\Big(f_n(b)-1\Big)$ converge. On en déduit que la série $\sum\big|f_n(x)-1\big|$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a,b]$. D'après **10**, on en déduit que

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ converge uniformément sur tout compact de }]0,+\infty[.}$$

(b) On a les égalités : $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N} f_n(x) &= \prod_{n=1}^{N}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right] = \left[\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n+x}{n}\right)^{-1}\right].\left[\prod_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\right]\\ &= \left[\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{n+x}\right].\exp\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{x}{n}\right) = N!\left[\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n+x}\right].\mathrm{e}^{x\left(u_N+\ln N\right)}\\ &= \frac{N!}{\prod_{n=1}^{N}(n+x)}\,N^x\,\mathrm{e}^{xu_N}\end{aligned}$$

Or, d'une part, d'après **2.(f)** : $\dfrac{N!\,N^x}{\prod_{n=1}^{N}(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\Gamma(x)$ et, d'autre part, d'après **1.(b)** : $u_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, donc $\mathrm{e}^{xu_N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\gamma x}$. Donc :

$$\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N} f_n(x) = x\Gamma(x)\,\mathrm{e}^{\gamma x},$$

et finalement :

$$\boxed{\forall s>0,\quad \Gamma(s) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\gamma s}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{s}{n}}.}$$

Partie IV

14. D'après **2.(c)**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x\, x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge absolument pour tout $t > 0$. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ étant continue, le théorème de transfert implique :

$$\mathbb{E}\big(\ln(X_t)\big) = \int_0^{+\infty}\ln x\, f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\ln x\, x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

donc :

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\ln(X_t)\big) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.}$$

De la même manière, on a :

$$Var\big(\ln(X_t)\big) = \mathbb{E}\big(\ln^2(X_t)\big) - \Big[\mathbb{E}\big(\ln(X_t)\big)\Big]^2,$$

avec :

$$\mathbb{E}\big(\ln^2(X_t)\big) = \int_0^{+\infty}\ln^2 x\, f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\ln^2 x\, x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}.$$

Donc :

$$Var\big(\ln(X_t)\big) = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} - \left(\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\right)^2 = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - \Gamma'^2(t)}{\Gamma^2(t)},$$

soit :

$$\boxed{Var\big(\ln(X_t)\big) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(t).}$$

Enfin, puisqu'une variance est toujours positive, on a : $(\ln\circ\Gamma)'' \geqslant 0$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\ln\circ\Gamma \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

15. **(a)** D'après **2.(h)** : $\forall s>0,\quad \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}=-\gamma+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{s+n-1}\right)$.

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=-\gamma+\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right).$$

Mais, on a aussi :

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}-\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k},$$

et donc, pour p suffisamment grand (en fait, $p\geqslant n$), on obtient par télescopie :

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{k},$$

où la somme $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{k}$ contient n termes inférieurs à $\dfrac{1}{p+1}$, donc : $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{k}\leqslant n\times\frac{1}{p+1}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

On obtient donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Enfin, puisque $\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$, la formule du **2.(h)** donne : $\Gamma'(1)=-\gamma$, et donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \Gamma'(1)=\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

(b) Considérons la fonction $\varphi_n : x\in[n,n+1]\mapsto\ln\Gamma(x)-(\ln n)x$. Alors φ_n est dérivable sur $[n,n+1]$ et :

$$\varphi_n(n+1)=\ln\Gamma(n+1)-(n+1)\ln n=\ln\big(n\Gamma(n)\big)-n\ln n-\ln n=\ln\Gamma(n)-n\ln n=\varphi_n(n).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha_n\in\,]n,n+1[$ tel que : $\varphi_n'(\alpha_n)=0$, c'est-à-dire tel que : $\dfrac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)}-\ln n=0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\exists\alpha_n\in\,]n,n+1[,\quad \ln n=\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)}.}$$

(c) Puisque $\ln\circ\Gamma$ est convexe d'après **14.**, la fonction $\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ est croissante. Donc, en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\forall n\geqslant 1,\quad \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}<\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)}<\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}<\frac{\Gamma'(\alpha_{n+1})}{\Gamma(\alpha_{n+1})},$$

et donc :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\quad \ln n<\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}<\ln(n+1).}$$

(d) On a déjà montré ce résultat à la question **15.(a)**, mais on peut aussi faire comme suit, avec le résultat précédent :

$$\ln n-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}<\ln(n+1)-\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k},$$

soit :

$$-u_n < \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k} < -u_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$ et que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème d'encadrement et en utilisant **15.(a)**, on en déduit que :

$$\boxed{\Gamma'(1) = -\gamma.}$$

16. **(a)** • L'inégalité $\ln x \leqslant x-1$ est connue et se démontre, par exemple, en étudiant la fonction $a_1 : x \mapsto x - 1 - \ln x$, et en montrant que son minimum est 0.

• En remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans l'inégalité précédente ($\frac{1}{x}$ reste strictement positif), on obtient : $\ln\frac{1}{x} = -\ln x \leqslant \frac{1}{x} - 1$, et donc : $\ln x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$.

En réunissant les deux inégalités, on obtient l'encadrement :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.}$$

• Si $x \geqslant 1$, alors $0 \leqslant \ln x \leqslant x-1$. Ainsi, en appliquant la fonction : $x \mapsto x^2$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\ln^2 x \leqslant (x-1)^2 \leqslant (x-1)^2 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2.$$

• De même, si $0 < x \leqslant 1$, alors : $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant 0$, et en appliquant la fonction : $x \mapsto x^2$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, on obtient :

$$\ln^2 x \leqslant \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2.$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln^2 x \leqslant \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2.}$$

(b) De même qu'en **14.**, le théorème de transfert donne :

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{t}\right) x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}x.$$

• On a donc d'une part, pour $t > 0$ et d'après **16.(a)** :

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{t} - 1\right) x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t\,\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} (x-t) x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{t\,\Gamma(t)} \left[\int_0^{+\infty} x^t\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - t\int_0^{+\infty} x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{t\,\Gamma(t)} \Big[\underbrace{\Gamma(t+1) - t\,\Gamma(t)}_{=0}\Big]$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant 0.}$$

• D'autre part, pour $t > 1$ alors $\Gamma(t-1)$ existe et, toujours d'après **16.(a)** :

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{t}{x}\right) x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-t}}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}t - \frac{t}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} x^{t-2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 1 - \frac{t}{\Gamma(t)}\,\Gamma(t-1) = 1 - \frac{t\,\Gamma(t-1)}{(t-1)\,\Gamma(t-1)} = 1 - \frac{t}{t-1},$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geqslant \frac{-1}{t-1}.}$$

(c) De la même manière, pour $t > 2$ alors $\Gamma(t-2)$ existe et, toujours d'après **16.(a)** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2\left(\frac{x}{t}\right) x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{t}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{t}-1\right)^2\right] x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty}\left[\frac{t^2}{x^2} - 2\frac{t}{x} + 2 - 2\frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2}\right] x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(t)}\left[t^2\,\Gamma(t-2) - 2t\,\Gamma(t-1) + 2\Gamma(t) - \frac{2}{t}\Gamma(t+1) + \frac{1}{t^2}\Gamma(t+2)\right].
\end{aligned}$$

Or : $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1) = (t-1)(t-2)\Gamma(t-2)$

et : $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, $\Gamma(t+2) = (t+1)\Gamma(t+1) = t(t+1)\Gamma(t)$. Donc :

$$\mathbb{E}\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} - \frac{2t}{t-1} + 2 - \frac{2t}{t} + \frac{t(t1)}{t^2} = \frac{2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)}.$$

Enfin, puisque $t > 2$, $2t^2 - t + 2 < 2t^2$ et : $0 < \dfrac{1}{(t-1)(t-2)} < \dfrac{1}{(t-2)^2}$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) < \frac{2t}{(t-2)^2}.}$$

17. **(a)** Considérons la variable aléatoire $Y = f \circ Z$, et on note $I =]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Puisque f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$, f est strictement monotone. Supposons f strictement croissante (l'autre cas se traitant de manière analogue), de sorte que $J = f(I) =]f(a), f(b)[$, avec $f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ et $f(b) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$. Alors, f^{-1} est aussi strictement croissante.

- Bien sûr, si $y \leqslant f(a)$ alors $P(Y < y) = 0$ et si $y \geqslant f(b)$, alors $P(Y < y) = 1$.

- Soit $y \in J$. Alors :

$$P(Y < y) = P(f \circ Z < y) = P(Z < f^{-1}(y)) = \int_a^{f^{-1}(y)} g(z)\,\mathrm{d}z \underset{z=f^{-1}(t)}{=} \int_{f(a)}^{y} g\circ f^{-1}(t)\left(f^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t.$$

f^{-1} étant strictement croissante, on a donc : $\left(f^{-1}\right)' \geqslant 0$, et alors :

$$P(f \circ Z < y) = \int_{f(a)}^{y} g\circ f^{-1}(t)\left|\left(f^{-1}\right)'(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

On peut donc conclure :

La variable aléatoire $f \circ Z$ a pour densité de probabilité la fonction : $g\circ f^{-1}\left\|\left(f^{-1}\right)'\right\|\mathbb{1}_J$.

(b) C'est une généralisation de la question précédente : notons $X = (X_1, \ldots, X_n)$ le vecteur aléatoire sur Ω dans $\mathbb{R}^n$, admettant une densité f. Puisque φ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{U}$,

alors le jacobien $J_\varphi(x) = \det\left(\mathrm{d}\varphi^{-1}\right)$ est non nul pour tout $x \in \mathcal{U}$. Alors, si h est une fonction continue et à support dans $\mathcal{U}$, le théorème de transfert et la formule du changement de variable donnent :

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(Y)\,\mathrm{d}P &= \int_{\mathcal{U}} h\circ\varphi(x)\,\mathrm{d}P^X(x)\\ &= \int_{\mathcal{U}} h\circ\varphi(x) f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathcal{V}} h\circ\left|J_\varphi(y)\right|^{-1} f\circ\varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Le vecteur $Y = \varphi(X)$ a donc pour densité : $\left|\det\left(\mathrm{d}\varphi^{-1}\right)\right| f\circ\varphi^{-1}\mathbb{1}_{\mathcal{V}}$.

18. **(a)** • Remarquons que : $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ et donc qu'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 est aussi une variable aléatoire de loi Gamma de densité f_1. Les variables aléatoires X_t et Y_j étant indépendantes, la densité du vecteur aléatoire $(X_t, Y_1, \ldots, Y_n)$ est :

$$h : (x, y_1, \ldots, y_n) \mapsto f_t(x) f_1(y_1)\ldots f_1(y_n) = \frac{x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \times \mathrm{e}^{-y_1}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y_1) \times \ldots \times \mathrm{e}^{-y_n}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y_n).$$

Nous allons utiliser la formule démontrée en **17.(b)** : considérons $\varphi : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1} \to \left]0,1[\right)^n \times \mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{x}{x+y_1}, \frac{x+y_1}{x+y_1y_2}, \ldots, \frac{x+y_1+\cdots+y_{n-1}}{x+y_1+\cdots+y_n}, x+y_1+\cdots+y_n\right).$$

L'application φ est bien un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ qui admet pour bijection réciproque $\varphi^{-1} : \left]0,1[\right)^n \times \mathbb{R}_+^* \to \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{n+1}$ définie par :

$$\varphi^{-1}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \left(\prod_{j=0}^n z_j, (1-z_0)\prod_{j=1}^n z_j, (1-z_1)\prod_{j=2}^n z_j, \ldots, (1-z_{n-1})z_n\right).$$

Le jacobien de φ^{-1} est :

$$\left|J_{\varphi^{-1}}(z_0,\ldots,z_n)\right| = \begin{vmatrix} z_1z_2\ldots z_n & z_0z_2\ldots z_n & z_0z_1z_3\ldots z_n & \ldots & z_0\ldots z_{n-1}\\ -z_1z_2\ldots z_n & (1-z_0)z_2\ldots z_n & (1-z_0)z_1z_3\ldots z_n & \ldots & (1-z_0)z_1\ldots z_{n-1}\\ 0 & -z_2\ldots z_n & (1-z_1)z_3\ldots z_n & \ldots & (1-z_1)z_2\ldots z_{n-1}\\ 0 & 0 & -z_3\ldots z_n & \ldots & (1-z_2)z_3\ldots z_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & -z_n & 1-z_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$= (z_1z_2\ldots z_n)\begin{vmatrix} 1 & z_0z_2\ldots z_n & z_0z_1z_3\ldots z_n & \ldots & z_0\ldots z_{n-1}\\ 0 & z_2\ldots z_n & z_1z_3\ldots z_n & \ldots & z_1\ldots z_{n-1}\\ 0 & -z_2\ldots z_n & (1-z_1)z_3\ldots z_n & \ldots & (1-z_1)z_2\ldots z_{n-1}\\ 0 & 0 & -z_3\ldots z_n & \ldots & (1-z_2)z_3\ldots z_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & -z_n & 1-z_{n-1}\end{vmatrix}$$

On obtient donc la formule de récurrence : $D_{0,n} = z_1z_2\ldots z_nD_{1,n}$. Et donc, on obtient aisément : $D_{0,n} = z_1z_2^2z_3^3\ldots z_n^n$.

Une densité de $Z = \left(\frac{X_t}{X_t+S_1}, \frac{X_t+S_1}{X_t+S_2}, \ldots, \frac{X_t+S_{n-1}}{X_t+S_n}, X_t+S_n\right)$ est donc définie par :

$$g(z_0,\ldots,z_n) = \frac{(z_0\ldots z_n)^{t-1}\,\mathrm{e}^{-z_0\ldots z_n}}{\Gamma(t)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z_0\ldots z_n) \times \mathrm{e}^{-(1-z_0)z_1\ldots z_n}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\left((1-z_0)z_1\ldots z_n\right)$$

$$\times \ldots \times \mathrm{e}^{-(1-z_{n-1})z_n}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\left((1-z_{n-1})z_n\right) \times z_1z_2^2\ldots z_n^n$$

Le produit des exponentielles donne simplement : e^{-z_n} et les fonctions indicatrices donnent : $\forall j \in [\![0, n-1]\!], z_j \in]0,1[$ et $z_n \in \mathbb{R}_+^*$. On obtient ainsi :

$$g(z_0, \ldots, z_n) = \frac{(z_0 \ldots z_n)^{t-1}\, \mathrm{e}^{-z_n}\, z_1 z_2^2 \ldots z_n^n}{\Gamma(t)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z_n) \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(z_j).$$

Finalement, en regroupant les facteurs "par indice" :

Une densité de $Z = \left(\dfrac{X_t}{X_t+S_1}, \dfrac{X_t+S_1}{X_t+S_2}, \ldots, \dfrac{X_t+S_{n-1}}{X_t+S_n}, X_t+S_n\right)$ est définie par :

$$g(z_0, \ldots, z_n) = \left[\frac{(z_n)^{t-1+n}\, \mathrm{e}^{-z_n}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z_n)}{\Gamma(t)}\right] \prod_{j=0}^{n-1} z_j^{t-1+j} \mathbb{1}_{]0,1[}(z_j).$$

(b) Puisque $\Gamma(t+n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)\right)\Gamma(t)$, on peut donc écrire g sous la forme :

$$g(z_0, \ldots, z_n) = \left[\frac{(z_n)^{t-1+n}\, \mathrm{e}^{-z_n}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z_n)}{\Gamma(t+n)}\right] \prod_{j=0}^{n-1} (t+j) z_j^{t-1+j} \mathbb{1}_{]0,1[}(z_j).$$

Ainsi, on reconnaît le premier facteur comme étant une densité de X_{t+n} :

$$f_{t+n}(z_n) = \frac{(z_n)^{t-1+n}\, \mathrm{e}^{-z_n}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z_n)}{\Gamma(t+n)}.$$

La loi de la variable aléatoire $X_t + S_n$ est la même que celle de X_{t+n}, donc de densité : f_{t+n}.

De même, dans chacun des autres facteurs, on reconnaît que :

La loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+S_{j-1}}{X_t+S_j}$ a pour densité : $z_j \mapsto (t+j) z_j^{t-1+j} \mathbb{1}_{]0,1[}(z_j)$.

(c) La densité g du $(n+1)$-uple Z étant le produit des densités marginales, on en déduit que :

Les variables aléatoires du $(n+1)$-uple $\left(\dfrac{X_t}{X_t+S_1}, \dfrac{X_t+S_1}{X_t+S_2}, \ldots, \dfrac{X_t+S_{n-1}}{X_t+S_n}, X_t+S_n\right)$ sont indépendantes.

(d) • Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, soit le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi_j : y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{-y}{t+j} \in \mathbb{R}_-^*$. Sa bijection réciproque est $\varphi_j^{-1} : z \in \mathbb{R}_-^* \mapsto -(t+j)z \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque Y_j admet pour densité f_1, on déduit de **17.(a)** qu'une densité g_j de $\varphi_j(Y_j) = \dfrac{-Y_j}{t+j}$ est définie par : $g_j(z) = \left|(\varphi_j^{-1})'(z)\right| (f_1 \circ \varphi_j^{-1})(z)$, et donc :

la variable aléatoire $\dfrac{-Y_j}{t+j}$ admet pour densité $g_j : z \mapsto (t+j)\, \mathrm{e}^{(t+j)z}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(z)$..

• D'après **18.(b)**, la variable aléatoire $\dfrac{X_t+S_j}{X_t+S_{j+1}}$ admet pour densité : $z_j \mapsto (t+j) z_j^{t-1+j} \mathbb{1}_{]0,1[}(z_j)$. En considérant le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $f = \ln$ de réciproque $f^{-1} = \exp$, on en déduit, d'après **17.(a)**, que la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{X_t+S_j}{X_t+S_{j+1}}\right)$ admet pour densité :

$$z_j \mapsto (t+j)\left(\mathrm{e}^{z_j}\right)^{t-1+j} \mathbb{1}_{]0,1[}(\mathrm{e}^{z_j}) \times \mathrm{e}^{z_j} = (t+j)\, \mathrm{e}^{(t+j)z_j}\, \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z_j).$$

Donc :

les variables aléatoires $\dfrac{-Y_j}{t+j}$ et $\ln\left(\dfrac{X_t+S_j}{X_t+S_{j+1}}\right)$ admettent la même densité.

(e) • Pour $t > 0$ et $n \geqslant 1$, on a :

$$d_{n+1,t} - d_{n,t} = \ln\left(\frac{t+n+1}{t+n}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

Or, on a démontré en **16.(a)** que : $\forall x > 0,\ 1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$, et donc on obtient :

$$\frac{1}{t+n+1} = 1 - \frac{t+n}{t+n+1} \leqslant \ln\left(\frac{t+n+1}{t+n}\right) \leqslant \frac{t+n+1}{t+n} - 1 = \frac{1}{t+n},$$

et donc :

$$\frac{-t}{(t+n+1)(n+1)} = \frac{1}{t+n+1} - \frac{1}{n+1} \leqslant d_{n+1,t} - d_{n,t} \leqslant \frac{1}{t+n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-t}{(t+n)(n+1)}.$$

On distingue alors deux cas :

♢ si $t \geqslant 1$, alors on obtient : $\left|d_{n+1,t} - d_{n,t}\right| \leqslant \left|\dfrac{-t}{(t+n+1)(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{1+t}{n(n+1)}$;

♢ si $0 < t < 1$, alors : $\left|d_{n+1,t} - d_{n,t}\right| \leqslant \left|\dfrac{\max(t, 1-t)}{(t+n)(n+1)}\right| \leqslant \dfrac{1+t}{n(n+1)}$.

• Comme $d_{n,t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on en déduit que, par télescopie :

$$\left|d_{n,t}\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} d_{k+1,t} - d_{k,t}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \left|d_{k+1,t} - d_{k,t}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{t+1}{n(n+1)} = (t+1)\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

et donc :

$$\boxed{\left|d_{n,t}\right| \leqslant \frac{t+1}{n}.}$$

(f) On peut effectivement écrire :

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{X_t + S_{j-1}}{X_t + S_j}\right) + \ln(X_t + S_n) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\ln(X_t + S_{j-1}) - \ln(X_t + S_j)\Big) + \ln(X_t + S_n) = \ln(X_t + S_0) = \ln(X_t).$$

De plus, on a vu en **18.(c)** que les variables aléatoires du $(n+1)$-uple Z sont indépendantes et donc il en est de même des variables aléatoires $\ln\left(\dfrac{X_t}{X_t + S_1}\right), \ldots, \ln\left(\dfrac{X_t + S_{n-1}}{X_t + S_n}\right), \ln(X_t + S_n)$. Ainsi, comme $\ln(X_t)$ s'écrit comme la somme de ces variables aléatoires , elle admet comme densité le produit de convolution des densités des variables aléatoires précédentes.

Or, les variables aléatoires $\ln\left(\dfrac{X_t + S_j}{X_t + S_{j+1}}\right)$ et $\dfrac{-Y_j}{t+j}$ ont la même loi d'après **18.(d)**, et il en est de même des variables aléatoires $X_t + S_n$ et X_{t+n}, et donc de $\ln(X_t + S_n)$ et $\ln(X_{t+n})$. On en déduit que la variable aléatoire $\ln(X_t)$ a la même loi que $\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{-Y_j}{t+j}\right) + \ln(X_{t+n})$. Or :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{-Y_j}{t+j}\right) + \ln(X_{t+n}) &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{t+j}\right) + \ln(X_{t+n}) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{t+j}\right) + \ln(X_{t+n}) + d_{n,t} - \gamma - \ln(t+n),\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\ln(X_t) \text{ a la même loi que la variable aléatoire : } -\gamma + \left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1} - \frac{Y_j}{t+j}\right) + \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) + d_{n,t}.}$$

(g) D'après **16.(c)**, pour $t>0$ et $n\geqslant 2$ on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(\ln^2\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)<\frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2}.$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\left|\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)-0\right|^2\right)=0,$$

ce qui signifie que :

la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{X_{t+n}}{t+n}\right)$ tend vers 0 en moyenne quadratique.

(h) D'après **18.(f)**, $\ln(X_t)$ a la même loi que $-\gamma+\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{t+j}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}$, pour tout $n\geqslant 1$. Or, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln\left(\dfrac{X_{t+n}}{t+n}\right)$ et $d_{n,t}$ tendent vers 0. Donc :

$\ln(X_t)$ a la même loi que la variable aléatoire : $-\gamma+\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{t+j}\right)$.

19. (a) D'après **18.(f)**, pour tout $n\geqslant 1$, $m\geqslant 1$ et $p\geqslant 1$, les variables aléatoires $2\ln(X_{2t})$, $\ln(X_t)$ et $\ln(X_{t+\frac{1}{2}})$ ont respectivement les mêmes lois que :

$$-2\gamma+2\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{2t+j}\right)+2\ln\left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n}\right)+2d_{n,2t};$$

$$-\gamma+\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{t+j}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+m}}{t+m}\right)+d_{m,t}\quad;\quad -\gamma+\left(\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{t+\frac{1}{2}+j}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+\frac{1}{2}+p}}{t+\frac{1}{2}+p}\right)+d_{p,t+\frac{1}{2}}.$$

On en déduit donc que : $2\ln(X_{2t})-\ln(X_t)-\ln(X_{t+\frac{1}{2}})-2\ln\left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n}\right)$ a la même loi que :

$$\mathbf{A}_{n,t}=2\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{2t+j}\right)+2d_{n,2t}-\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{t+j}\right)-\ln\left(\frac{X_{t+m}}{t+m}\right)-d_{m,t}-\ldots$$

$$\ldots-\left(\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j+1}-\frac{Y_j}{t+\frac{1}{2}+j}\right)-\ln\left(\frac{X_{t+\frac{1}{2}+p}}{t+\frac{1}{2}+p}\right)-d_{p,t+\frac{1}{2}},$$

avec :

$$\begin{aligned}2d_{n,2t}-d_{m,t}-d_{p,t+\frac{1}{2}}&=2\ln(2t+n)-2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\ln(t+m)+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}-\ln\left(t+\frac{1}{2}+p\right)+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\\&=\ln\left(\frac{(2t+n)^2}{(t+m)\left(t+\frac{1}{2}+p\right)}\right)-2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbf{A}_{n,t}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{-Y_j}{t+\frac{j}{2}}-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{-Y_j}{t+j}-\sum_{j=0}^{p-1}\frac{-Y_j}{t+\frac{1}{2}+j}-\ln\left(\frac{X_{t+m}}{t+m}\right)-\ln\left(\frac{X_{t+\frac{1}{2}+p}}{t+\frac{1}{2}+p}\right)+\ln\left(\frac{(2t+n)^2}{(t+m)\left(t+\frac{1}{2}+p\right)}\right).$$

Nous allons déterminer m et p afin d'annuler les trois sommes de $\mathbf{A}_{n,t}$.

Dans la première somme, les termes vont de $\dfrac{-Y_0}{t}$ à $\dfrac{-Y_{n-1}}{t+\frac{n-1}{2}}$. Ainsi :

- si n est pair, le dernier terme est : $\dfrac{-Y_{n-1}}{t+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{1}{2}}$; on doit donc choisir $m=\dfrac{n}{2}$ et $p=\dfrac{n}{2}$.
- si n est impair, le dernier terme est : $\dfrac{-Y_{n-1}}{t+\frac{n+1}{2}-1}$; on choisit $m=\dfrac{n+1}{2}$ et $p=\dfrac{n-1}{2}$.

Ainsi, avec $m=\left\lfloor\dfrac{n+1}{2}\right\rfloor$ et $p=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$, on obtient :

$$\mathbf{A}_{n,t}=-\ln\left(\frac{X_{t+m}}{t+m}\right)-\ln\left(\frac{X_{t+\frac{1}{2}+p}}{t+\frac{1}{2}+p}\right)+\ln\left(\frac{(2t+n)^2}{(t+m)\left(t+\frac{1}{2}+p\right)}\right).$$

Enfin, puisque $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ on en déduit que :

$$r_n=\ln\left(\frac{(2t+n)^2}{(t+m)\left(t+\frac{1}{2}+p\right)}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{(2t+n)^2}{\left(t+\frac{n}{2}\right)\left(t+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln\left(\frac{n^2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right)=2\ln 2.$$

On peut donc conclure que :

La variable aléatoire $2\ln(X_{2t})$ a la même loi que la variable aléatoire :

$$\ln(X_t)+\ln(X_{t+\frac{1}{2}})+2\ln\left(\frac{X_{2t+n}}{2t+n}\right)-\ln\left(\frac{X_{t+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}{t+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\right)-\ln\left(\frac{X_{t+\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor+\frac{1}{2}}}{t+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\frac{1}{2}}\right)+r_n$$

avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=2\ln 2$.

(b) Comme en **18.(g)** et d'après **18.(f)**, lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$, on déduit de **19.(a)** que la variable aléatoire $2\ln(X_{2t})$ admet la même loi que $\ln(X_t)+\ln(X_{t+\frac{1}{2}})+2\ln 2$.

L'espérance de la variable aléatoire $2\ln(X_{2t})$ est :

$$\mathbb{E}\big(2\ln(X_{2t})\big)=\int_0^{+\infty}2\ln x\,\frac{x^{2t-1}\,\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma'(2t)}{\Gamma(2t)},$$

car : $u:x\mapsto x^{2t-1}=\mathrm{e}^{(2t-1)\ln x}$ a pour dérivée : $u':x\mapsto 2\ln x\,\mathrm{e}^{(2t-1)\ln x}$.

De la même manière, on a aussi les espérances :

$$\mathbb{E}\big(\ln(X_t)\big)=\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\qquad\text{et :}\qquad\mathbb{E}\big(\ln(X_{t+\frac{1}{2}})\big)=\frac{\Gamma'\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)}.$$

On a donc l'égalité :

$$(\ln\circ\Gamma)'(2t)=(\ln\circ\Gamma)'(t)+(\ln\circ\Gamma)'\left(t+\frac{1}{2}\right)+\ln(2^2).$$

En intégrant, on obtient donc :

$$(\ln\circ\Gamma)(2t)=(\ln\circ\Gamma)(t)+(\ln\circ\Gamma)\left(t+\frac{1}{2}\right)+t\ln(2^2)+k,\quad\text{où } k\in\mathbb{R}.$$

En passant à l'exponentielle :

$$\Gamma(2t)=2^{2t}\,\mathrm{e}^k\,\Gamma(t)\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right).$$

On détermine la constante e^k avec la valeur particulière $t=\dfrac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\Gamma(1)=2\,\mathrm{e}^k\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)\quad\text{soit :}\quad\mathrm{e}^k=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Finalement, on obtient bien la formule de duplication de Legendre :

$$\boxed{\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).}$$