Agrégation Interne

Exemples d'utilisation de polynômes en analyse

J. M. Arnaudies, J. Lelong-Ferrand — *Cours de Mathématiques. Analyse.* Dunod (1974).

M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre. *Exercices de probabilités.*Cassini (2011).

J. F. Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* Vuibert (2016).

X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (2004).

J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).

J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L3.* Dunod. (2015).

J. Y. Ouvrard. *Probabilités 1.* Cassini.

Exercice 1 (d'Alembert-Gauss) *On propose plusieurs démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss qui nous dit que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algébriquement clos.*[1] *Pour ce faire, on se donne un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ et en raisonnant par l'absurde, on suppose qu'un tel polynôme ne s'annule jamais.*

1. *On utilise le fait qu'une fonction continue sur un compact de $\mathbb{C}$ est bornée et atteint ses bornes.*
   (a) *Soit Q un polynôme non constant tel que $Q(0) = 1$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|Q(z_0)| < 1$.*
   (b) *Montrer que, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, il existe $t_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(t_1)| < |P(z_1)|$ (on rappele que P est supposé ne jamais s'annuler).*
   (c) *Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que :*
   $$\forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R), \ \frac{|z|^n}{2} \leq |P(z)| \leq 3\frac{|z|^n}{2}$$
   où $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$.
   (d) *Montrer que $\lim_{|z| \to +\infty} \frac{|P(z)|}{|z|^k} = +\infty$ pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$.*
   (e) *Montrer qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_1)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$ et conclure.*
2. *Une démonstration très courte qui utilise la dérivation sous le signe d'intégration de la fonction $r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.*
   (a) *Vérifier que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(r,\theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, puis établir une relation entre $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$.*

1. Le résultat est alébrique, mais les méthodes analytiques. On peut discuter la présence de cet exercice pour cette leçon. Il peut être utilisé pour la leçon d'oral 1 : Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.

(b) *Montrer que la fonction* $f : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P\left(re^{i\theta}\right)}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$. *Préciser sa dérivée sur* $\mathbb{R}^*$ *et conclure.*

3. *Avec cette question, on se propose de montrer le résultat suivant qui est utilisé dans les deux questions suivantes : si* f *est une fonction développable en série entière en* 0 *avec un rayon de convergence* $R \in \left]0, +\infty\right]$ *et telle que* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in D(0, R)$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est développable en série entière en* 0 *avec le même rayon de convergence (ce résultat pouvant être admis dans le cadre de cette leçon d'oral).*

   (a) *Montrer que pour tout* $r \in \left]0, R\right[$, *la fonction* φ_r *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi_r(t) = \dfrac{1}{f\left(re^{it}\right)}$ *est développable en série de Fourier. On note* $\left(c_n(r)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *la suite de ses coefficients de Fourier exponentiels.*

   (b) *Montrer que, pour tout entier relatif* n, *la fonction* b_n *définie sur* $\left]0, R\right[$ *par* $b_n(r) = \dfrac{c_n(r)}{r^n}$ *est constante. On note* b_n *sa valeur.*

   (c) *Montrer que* $b_n = 0$ *pour tout* $n < 0$ *et conclure.*

4. *On utilise un théorème de permutation des signes de sommation et d'intégration pour une série normalement convergente et le résultat de la question* ***3****.*

   (a) *Soit* f *une fonction entière. Montrer que* $\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta = 0$.

   (b) *Définissant la fonction* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par* $\varphi(\theta) = \dfrac{1}{\left|P\left(2\cos(\theta)\right)\right|^2}$, *montrer que* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, d\theta > 0$.

   (c) *Vérifier que les fonctions* $Q : z \mapsto P(z)\overline{P(\overline{z})}$ *et* $R : z \mapsto z^{2n} Q\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ *sont polynomiales ne s'annulant jamais sur sur* $\mathbb{C}$. *Conclure.*

5. *On utilise le résultat de la question* ***3*** *et le théorème de Liouville.*

   (a) *Montrer que les seules fonctions entières et bornées sur* $\mathbb{C}$ *sont les fonctions constantes (théorème de Liouville).*

   (b) *En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss*

Exercice 2 (Quelques caractérisations des fonctions polynomiales) *On rappelle qu'une fonction entière sur* $\mathbb{C}$ *est une fonction développable en série entière en* 0 *avec un rayon de convergence infini.*

1. *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction entière pour laquelle il existe une fonction polynomiale* P *telle que* $|f(z)| \leq |P(z)|$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *Montrer que* f *est polynomiale. Que peut-on dire dans le cas où le polynôme* P *est constant ?*

2. *Montrer qu'une série entière* $\sum a_n z^n$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{C}$ *si, et seulement si, sa somme* f *est une fonction polynomiale.*

3. *Soit* $\left(f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions entières avec :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ f_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)} z^n$$

qui converge uniformément vers une fonction f sur tout compact de $\mathbb{C}$. Montrer que f est une fonction entière.

4. *Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est entière sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$.*

Exercice 3 (Polynomes de Bernstein, version analytique) *L'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par $B_{n,k}(x) = x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout réel x et à toute fonction $f \in E$, on associe la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales de Bernstein définie par $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$B_n(xf) = \frac{x(1-x)}{n} (B_n(f))' + xB_n(f)$$

2. *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note e_k la fonction polynomiale définie par $e_k(x) = x^k$ pour tout réel x.*

   (a) *Calculer $B_n(e_k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,1,2\}$.*

   (b) *Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) \binom{n}{k} B_{n,k}(x) = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

3.

   (a) *Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a :*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \alpha}}^{n} \binom{n}{k} B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$$

   (la somme étant nulle quand l'ensemble des entiers k compris entre 0 et n tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha$ est vide).

   (b) *Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*

4.

   (a) *Montrer qu'une fonction $f \in E$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers relatifs si, et seulement si, $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers relatifs.*

   (b) *En déduire que, pour tout réel $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, l'anneau $\mathbb{Z}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients entiers relatifs est dense dans $(\mathcal{C}^0([\delta, 1-\delta]), \|\cdot\|_\infty)$.*

5.

(a) *En notant* $C_{n,k} = \binom{n}{k} B_{n,k}$, *montrer que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $C'_{n,0} = -nC_{n-1,0}$, $C'_{n,n} = nC_{n-1,n-1}$ *et* $C'_{n,k} = n\left(C_{n-1,k-1} - C_{n-1,k}\right)$ *pour* $1 \leq k \leq n-1$.

(b) *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in E$, *montrer que :*

i. $B_n(f)' = n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n-1}{k}B_{n-1,k}$;

ii. *dans le cas où* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$, *la suite* $\left(B_n(f)'\right)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* f' *sur* $[0,1]$.

6. *Montrer le théorème de Weierstrass : Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *avec* $a < b$. *Si* g *est continue sur* $[a,b]$, *alors* g *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de polynômes.*

7. *Montrer que si une fonction* f *est limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'une suite de fonctions polynomiales, c'est alors une fonction polynomiale (le théorème de Weierstrass n'est pas valable sur* $\mathbb{R}$*).*

Exercice 4 (Polynômes de Bernstein, version probabiliste) *On se donne deux réels* $a < b$ *et une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue. On suppose de plus que, pour tout réel* $x \in [a,b]$, *on dispose d'une suite* $(X_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, *toutes de carrées intégrables telles que* $\mathbb{E}(X_{n,x}) = x$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et on associe à ces suites de variables aléatoires les suites de fonctions* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ E_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(X_{n,x}\right)\right),\ V_n(x) = \mathbb{V}\left(X_{n,x}\right)$$

1. *Montrer que si la suite de fonctions* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $[a,b]$, *alors la suite de fonctions* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.

2. *Pour cette question,* $[a,b] = [0,1]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *tout* $x \in [0,1]$, $X_{n,x} = \frac{B_{n,x}}{n}$ *où* $B_{n,x}$ *est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre* (n,x). *Donner une expression de* $E_n(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *tout* $x \in [0,1]$ *et en déduire que la fonction* f *est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur* $[0,1]$ *(théorème de Weierstrass).*

3. *En gardant les notations de la question précédente, on suppose de plus que* f *est dérivable sur* $[0,1]$ *et* $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est la suite des polynômes de Bernstein introduite à l'exercice précédent. On se propose de montrer que, pour tout réel* $a \in [0,1]$, *la suite* $\left(B_n(f)'(a)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* $f'(a)$. *On pourra utiliser l'expression de la dérivée de* $B_n(f)$ *donnée à la question* ***5(b)i*** *de l'exercice précédent.*

(a) *Montrer le résultat annoncé pour* $a = 0$ *et* $a = 1$.

Pour la suite de cette question a *est dans* $]0,1[$ *et on désigne par* g *et* h *les fonctions respectivement définies sur* $[0,1]$ *par :*

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$$

et :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 \text{ si } x = a \end{cases}$$

(b) *En notant* $C_{n,k} = \binom{n}{k} B_{n,k}$, *montrer que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $C'_{n,k}(x) = \dfrac{n}{x(1-x)}\left(\dfrac{k}{n} - x\right) C_{n,k}(x)$ *pour* $0 \leq k \leq n$ *et* $x \in]0,1[$, *puis que* $B_n(g)'(x) = \dfrac{\mathbb{E}\left((X_{n,x} - x)\, g(X_{n,x})\right)}{\mathbb{V}(X_{n,x})}$.

(c) *En déduire que* $B_n(g)'(a) = \dfrac{\mathbb{E}\left((X_{n,a} - a)^2 h(X_{n,a})\right)}{\mathbb{V}(X_{n,a})}$, *puis que* $|B_n(g)'(a)| \leq \dfrac{\sqrt{\mathbb{E}\left((X_{n,a} - a)^4\right)}\sqrt{B_n(h^2)}}{\mathbb{V}(X_{n,a})}$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) *Montrer qu'il existe une constante* $\lambda > 0$ *telle que* $\mathbb{E}\left((X_{n,a} - a)^4\right) \leq \dfrac{\lambda}{n^2}$ *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$ *(on pourra compléter les calculs de la question* ***2a*** *de l'exercice* ***3*** *pour* $k = 3$ *et* $k = 4$*).*

(e) *En déduire que* $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n(g)'(a) = 0$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n(f)'(a) = f'(a)$.

Exercice 5 (Polynômes de Bernoulli et formule d'Euler-Maclaurin) *Les nombres de Bernoulli qui interviennent dans la formule d'Euler-Maclaurin peuvent être utilisés pour calculer les sommes* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$, *pour obtenir un développement asymptotique de* $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ *et pour donner une expression de* $\zeta(2p) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{2p}}$.

1. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que* f *admet une unique primitive* F *sur* $[0,1]$ *telle que* $\int_0^1 F(x)\, dx = 0$.

   On désigne par $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite des polynômes de Bernoulli définie par* $B_0 = 1$ *et la relation de récurrence :*

   $$\forall n \geq 1,\ B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(x)\, dx = 0 \tag{1}$$

   et par $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (B_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite des nombres de Bernoulli.*

2. *Montrer que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

   (a) $B_n^{(k)}(1-x) = (-1)^{n-k} B_n^{(k)}(x)$ *pour pour tout entier* k *compris entre* 0 *et* n *;*

   (b) $B_n^{(n-1)}(0) = -B_n^{(n-1)}(1)$, $B_n^{(n)}(1) = B_n^{(n)}(0)$, $B_n^{(k)}(1) = (-1)^{n-k} B_n^{(k)}(0) = B_n^{(k)}(0)$ *pour* $n \geq 2$ *et* k *compris entre* 0 *et* $n-2$.

   (c) $b_n = 0$ *pour* $n \geq 3$ *impair,* $B_n^{(k)}(1) = B_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$ *pour* $n \geq 2$ *et* $0 \leq k \leq n-2$, $B_n^{(n-1)}(1) = -B_n^{(n-1)}(0) = \dfrac{n!}{2}$.

3. *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $[0,1]$. *Montrer qu'il existe un réel* $\xi \in [0,1]$ *tel que :*

   $$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\, dx &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - b_2 \frac{f'(1) - f'(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 B_2(x) f''(x)\, dx \\ &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{f''(\xi)}{12}\end{aligned}$$

   ce qui nous donne une expression de l'erreur dans la méthode du trapèze sur $[0,1]$.

4. *Soient p un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p}$ sur $[0,1]$. Montrer que :*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(1) - f^{(2j-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 B_{2p}(x)\, f^{(2p)}(x)\,dx$$

5. *Soient n,p deux entiers naturels non nuls et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p}$ sur $[0,n]$. Montrer que :*

$$\int_0^n f(x)\,dx = \frac{f(0)+f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2p)!}\int_0^n \widetilde{B_{2p}}(x)\, f^{(2p)}(x)\,dx$$

où $\widetilde{B_{2p}}$ est la fonction 1-périodique qui coïncide avec B_{2p} sur $[0,1]$ (on a $B_{2p}(1) = B_{2p}(0)$).

6. *Soient n,p deux entiers naturels non nuls. Donner une expression de $\sum_{k=1}^{n} k^p$ qui utilise les nombres de Bernoulli.*

7. *Soient n,p deux entiers naturels non nuls. En notant $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$ la constante d'Euler, montrer que :*

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{p}\frac{b_{2j}}{2j} - \int_0^{+\infty} \frac{\widetilde{B_{2p}}(x)}{(x+1)^{2p+1}}dx$$

et qu'on a le développement asymptotique :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{j=1}^{p}\frac{b_{2j}}{2j}\frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

8. *Montrer que pour tout entier naturel non nul p et tout réel $x \in [0,2\pi]$, on a :*

$$B_{2p}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = 2(-1)^{p+1}\frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(kx)}{k^{2p}}$$

En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2p}} = (-1)^{p+1}\frac{2^{2p-1}}{(2p)!}b_{2p}\pi^{2p}$.

Exercice 6 (Polynômes orthogonaux) *Avec cet exercice, on présente les polynômes orthogonaux classiques comme vecteurs propres d'un opérateur différentiel sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni d'une structure pré-hilbertienne adaptée.*
On se donne deux polynômes $A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $B(X) = b_0 + b_1X$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que

$pa_2 + b_1 \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et on leur associe l'opérateur différentiel u défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $u(P) = AP'' + BP'$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et une fonction $\pi : I \to \mathbb{R}^{+,*}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\forall x \in I,\ A(x)\, y'(x) = (B(x) - A'(x))\, y(x)$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b \left|x^k\right| \pi(x)\, dx < +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} x^n A(x)\, \pi(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} x^n A(x)\, \pi(x) = 0$$

On munit alors l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \langle P \mid Q \rangle = \int_a^b P(x)\, Q(x)\, \pi(x)\, dx$$

1. *Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la restriction u_n de u à $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_k = k((k-1)a_2 + b_1)$ $(0 \leq k \leq n)$, chaque espace propre $\ker(u_n - \lambda_k Id)$, pour $0 \leq k \leq n$, étant de dimension 1 engendré par un polynôme unitaire P_k de degré k.*
2. *Montrer que l'opérateur u est symétrique pour le produit scalaire associé à la fonction π (i.e. $\langle u(P) \mid Q \rangle = \langle P \mid u(Q) \rangle$ pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[X]$) et que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.*
3. *On désigne par $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $\varphi_n = \pi A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (a) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout k compris entre 0 et $n-1$, on a $\varphi_n^{(k)} = \pi A^{n-k} Q_{n,k}$ où $Q_{n,k}$ est un polynôme de degré k.*
   (b) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_{n,n} = \dfrac{1}{\pi} \varphi_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n, puis que la famille $(Q_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.*
4. *Déduire de ce qui précède qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tous non nuls telle que $P_n = \alpha_n \dfrac{1}{\pi} (\pi A^n)^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
5. *Traiter les cas :*
   (a) *$(A(X), B(X)) = (X^2 - 1, 2X)$ sur $]-1, 1[$ (polynômes de Legendre) ;*
   (b) *$(A(X), B(X)) = (X^2 - 1, X)$ sur $]-1, 1[$ (polynômes de Tchebychev) ;*
   (c) *$(A(X), B(X)) = (X, -X + 1)$ sur $]0, +\infty[$ (polynômes de Laguerre) ;*
   (d) *$(A(X), B(X)) = (1, -2X)$ sur $\mathbb{R}$(polynômes d'Hermite).*

Exercice 7 (Séries matricielles) *Les polynômes d'interpolation de Lagrange sont utilisés pour donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ dans le cas d'une matrice A diagonalisable.*

Soit $f(z) = \sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ comme valeurs propres complexes deux à deux distinctes telles que $|\lambda_k| < R$ pour $1 \leq k \leq p$.*
   (a) *Justifier la définition de la matrice $f(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$.*

(b) *En utilisant un polynôme d'interpolation de Lagrange, montrer qu'il existe un polynôme* $L \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ *tel que* $f(A) = L(A)$.

2. *Calculer pour* $\theta \in \mathbb{R}^*$, *l'exponentielle de* $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

3. *Calculer pour* $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, *l'exponentielle de* $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.