Contrôle continu du 13 mai 2020

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Durée de l'épreuve : 3 heures.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) \;=\; f(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

où $y \in C^2(\mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

a) On suppose tout d'abord que $f \equiv 0$. Calculer la solution générale de l'équation (1) dans ce cas particulier.

b) On revient au cas général. En utilisant la méthode dite de "variation des constantes", trouver une solution de l'équation complète (1). *Remarque :* cette solution pourra être exprimée en termes d'intégrales faisant intervenir la fonction f.

c) En utilisant les questions précédentes, montrer que l'équation (1) possède une unique solution bornée y_b, et que cette solution est de la forme

$$y_b(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} K(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

où $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et intégrable que l'on précisera.

d) Calculer la solution y_b dans le cas particulier où $f(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} K(t)\,\mathrm{d}t$. En conclure que, dans le cas général, on a l'inégalité

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |y_b(t)| \;\le\; \frac{1}{6}\,\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\,. \tag{3}$$

e) Si $f(t) \to \ell$ lorsque $t \to +\infty$ pour un $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que toute solution de (1) vérifie $y(t) \to \ell/6$ lorsque $t \to +\infty$.

f) Calculer explicitement la solution y_b lorsque $f(t) = \cos(\alpha t)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, et vérifier dans ce cas que $|y_b(t)| \le 1/6$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, en accord avec la question d).

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) \;=\; -2x^3 - y^4 + \frac{8z^3}{3}\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

et soit $K = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2 \le 1\,,\; z \ge 0\big\} \subset \mathbb{R}^3$. On souhaite déterminer le maximum et le minimum de la fonction f restreinte à l'ensemble K.

a) Expliquer pourquoi la fonction f a nécessairement un maximum global et un minimum global sur K. À ce stade, on ne demande pas de calculer ces extrema.

b) Notons Ω l'intérieur de K. Montrer que $K = \Omega \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$, où M_1, M_2, M_3, sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ de différentes dimensions que l'on décrira géométriquement. Vérifier en outre que la famille $\{\Omega, M_1, M_2, M_3\}$ forme une partition de K.

c) Déterminer les extrema locaux de la fonction f sur l'ouvert Ω ainsi que sur chacune des sous-variétés M_1, M_2, M_3 de la question précédente.

d) En déduire le maximum global et le minimum global de la fonction f sur l'ensemble K. Préciser également les points où ces extrema sont atteints.

Exercice 3.

On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ la demi-droite réelle achevée, munie de son ordre naturel. On rappelle que $\overline{\mathbb{R}}_+$ est un espace métrique muni de la distance

$$d(a, b) = \big|\arctan(a) - \arctan(b)\big|, \qquad \text{pour tout } (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2,$$

où l'on convient que $\arctan(\infty) = \pi/2$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Pour toute donnée initiale $y_0 \in U$, on note $T^*(y_0) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ la borne supérieure des réels $T > 0$ tels que le problème de Cauchy

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T], \qquad y(0) = y_0, \tag{4}$$

possède une solution unique $y \in C^1([0, T], U)$.

a) Rappeler brièvement pourquoi le temps maximal d'existence $T^*(y_0)$ est bien défini et strictement positif pour toute donnée initiale $y_0 \in U$. Si $T^*(y_0) < \infty$, que peut-on dire de la solution $y(t)$ lorsque $t \to T^*(y_0)$?

b) En utilisant un résultat du cours, montrer que, pour tout point $y_0 \in U$ et tout réel $T > 0$ tel que $T < T^*(y_0)$, il existe un voisinage ouvert V de y_0 dans U tel que $T^*(y_1) > T$ pour tout $y_1 \in V$.

c) Déduire de la question précédente que, si $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans U qui converge vers $\bar{y} \in U$, alors

$$T^*(\bar{y}) \leq \liminf_{k \to \infty} T^*(y_k).$$

On dit que l'application $T^* : U \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est *semi-continue inférieurement.*

d) Soit $K \subset U$ un sous-ensemble compact non vide. Montrer qu'il existe un point $\bar{y} \in K$ tel que

$$T^*(\bar{y}) = \inf_{y \in K} T^*(y), \qquad \text{de sorte que} \quad \inf_{y \in K} T^*(y) > 0.$$

Indication : prendre une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans K telle que $T^*(y_k) \to \inf_{y \in K} T^*(y)$ quand $k \to \infty$.

e) On suppose que $U = \mathbb{R}^2$ et que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est définie par

$$f(y_1, y_2) = \left(0, \frac{\cosh^2(y_2)}{1 + y_1^2 \cosh^2(y_2)}\right), \qquad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculer $T^*(y_1, y_2)$ pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $T^* : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est-elle continue ?

f) Expliquer pourquoi, si $U \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide et $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, la fonction $T^* : U \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est nécessairement continue.