Ex. 1 1) φ est symétrique et linéaire à gauche. C'est bien une FBS. (une rédaction plus détaillée est attendue).

Il reste à voir : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,P) \geq 0$ et $(\varphi(P,P)=0 \Rightarrow P=0)$.

. $\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx + P^2(0) \geq 0$ car P^2 est une fonction positive.

. Si $\varphi(P,P)=0$, on a $\int_{-1}^{1} P^2(x)\,dx = 0$ et $P^2(0) = 0$ car ces deux termes sont ≥ 0. Comme P^2 est positive et continue, on déduit de la première inégalité $\forall x \in [-1,1]$, $P^2(x)=0$.

Donc P admet une infinité de racines (tous les points de $[-1,1]$) donc $P=0$.

2) $\varphi(X^i, X^j) = \int_{-1}^{1} x^{i+j}\,dx + X^{i+j}(0)$

. si $i+j=0$ X^{i+j} est le polynôme 1

donc $\varphi(1,1) = 2+1 = 3$.

. si $i+j > 0$ $X^{i+j}(0) = 0$.

. si $i+j$ est pair $\int_{-1}^{1} x^{i+j}\,dx = 2\int_0^1 x^{i+j}\,dx$

$$= 2\left[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{i+j+1}$$

. si $i+j$ est impair la fonction X^{i+j} est impaire donc son intégrale est nulle sur $[-1,1]$.

3) On en déduit la matrice dans la base $(1, X, X^2)$:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

4) Procédé de Gram-Schmidt : On note la base canonique (e_0, e_1, e_2), $e_i = X^i$.

On commence par construire une base orthogonale :

$$u_0 = e_0, \quad u_1 = e_1 - \frac{\varphi(e_1, e_0)}{\varphi(e_0, e_0)} \cdot e_0$$

$$= e_1 \quad \text{car} \quad \varphi(e_1, e_0) = 0 \text{ d'après 2).}$$

$$u_2 = e_2 - \frac{\varphi(e_2, e_0)}{\varphi(e_0, e_0)} e_0 - \frac{\varphi(e_2, e_1)}{\varphi(e_1, e_1)} e_1$$

$$= e_2 - \frac{2/3}{3} e_0$$

$$= X^2 - \frac{2}{9}$$

On normalise pour conclure :

$$f_0 = \frac{1}{\|u_0\|} u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X. \quad , \quad \varphi(u_2, u_2) = \varphi(X^2, X^2) - \frac{4}{9} \varphi(X^2, 1) + \frac{4}{81} \varphi(1, 1)$$

$$f_2 = 3\sqrt{\frac{15}{34}} (X^2 - 2/9). \quad = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{81} \cdot 3$$

$$= 34/_{5 \times 27}$$

5) La meilleure approximation est donnée par le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$, qui s'obtient avec la formule :

$$u = \varphi(X^3, f_0) f_0 + \varphi(X^3, f_1) f_1 + \varphi(X^3, f_2) f_2$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} X = \frac{3}{5} X.$$

4) Le minimum de la distance est réalisé par $X^3 - u$.

On peut calculer δ par Pythagore : $\delta^2 = \varphi(X^3, X^3) - \varphi(u, u)$.

$$= \frac{2}{7} - \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{175}$$

donc $\delta = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$ et le minimum est réalisé pour $a = c = 0$, $b = 3/5$.

Ex. 2

1) $q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 4xz + 2y^2 + 2yz + 9z^2$

$= (x+y+2z)^2 + y^2 + 5z^2 - 2yz$

$= (x+y+2z)^2 + (y-z)^2 + 4z^2.$

la signature est $(3,0)$ donc q est bien associée à un produit scalaire.

2) $\phi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + x'y + 2xz' + 2x'z + 2yy' + yz' + y'z + 9zz'$

$z=0,\ x'=0$

d'où $\phi(e_1,e_2) = 1+2-2-1$

$= 0.$

donc e_1 et e_2 sont ϕ-orthogonaux.

3) $q(e_1) = 1-2+2 = 1$ donc $\|e_1\|_\phi = 1.$

$q(e_2) = 2+2+9 = 13$ donc $\|e_2\|_\phi = \sqrt{13}.$

4) En notant v le projeté de e_3 sur G, on a la formule :

$v = \frac{\phi(e_3,e_1)}{q(e_1)} e_1 + \frac{\phi(e_3,e_2)}{q(e_2)} e_2$

$= \frac{3}{13} e_2$ car $\phi(e_3,e_1) = 1-1 = 0$ et $\phi(e_3,e_2) = 1+2 = 3$

5) la distance de e_3 à G est $\|e_3 - v\|$. Par Pythagore, on a

$\|e_3 - v\|^2 = \|e_3\|^2 - \|v\|^2$

$= 1 - \frac{9}{13^2} \cdot 13$

$= \frac{4}{13}$ donc la distance est de $\frac{2}{\sqrt{13}}$.

6) $\tilde{q}(0,0,1,2) = 5-8 = -3 < 0$. Il existe un vecteur u tel que $\tilde{q}(u) < 0$

donc $\tilde{q}$ n'est pas associée à un produit scalaire.

7) On peut écrire $\mathcal{F} = \{(x,y,z,-z) \,;\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

donc $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\dim \mathcal{F} = 3$, les vecteurs ci-dessus forment une base.

8) On calcule : $\tilde{q}(x,y,z,-z) = q(x,y,z)$ où x, y et z sont les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathcal{F}$ dans la base ci-dessus. $\tilde{q}$ est donc un produit scalaire dans $\mathcal{F}$.

La question porte sur $\tilde{q}$ donc dans $\mathbb{R}^4$.

9) * On peut répondre par un argument théorique : d'après 8) il existe un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3 dans lequel la restriction de $\tilde{q}$ est un produit scalaire. En considérant une base orthogonale pour $\tilde{q}$ dont les 3 premiers vecteurs sont dans $\mathcal{F}$, la matrice de $\tilde{q}$ aura trois coefficients diagonaux > 0 et un inconnu. De là on tire que la signature pourrait être $(4,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$. Or, dans les deux premiers cas on aurait $\forall u \in \mathbb{R}^4,\ \tilde{q}(u) \geq 0$, ce qui n'est pas possible d'après 6).
Donc la signature de $\tilde{q}$ est $(3,1)$ et $\mathrm{rg}\, \tilde{q} = 4$.

* Mais on peut aussi bien reprendre l'algorithme de Gauss :

$$\tilde{q}(x,y,z,t) = (x+y+2z)^2 + (y-z)^2 + 4z^2 - 4zt$$

$$= (x+y+2z)^2 + (y-z)^2 + 4\left(z - \frac{t}{2}\right)^2 - t^2.$$