MAT303

CC2. Mardi 7 décembre. Durée de l'épreuve : 1h.

Documents et téléphones portables interdits. La rédaction et la précision des arguments seront des critères importantes d'évaluation

Question 1 : autour du cours.

1. Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^d$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, $v \in U$ et $w \in \mathbb{R}^d$. On suppose que la dérivée partielle de f au point v et en direction de w, que l'ont note $\frac{\partial f}{w}(v)$, existe. Donner sa définition.
2. Soit $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Donner la définition de "f est différentiable en v, et sa différentielle en ce point est L.
3. On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$ si $y \neq 0$ et $g(x,y) = 0$ sinon.
   (a) Montrer que pour tout vecteur $w = (a,b)$ la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0)$ existe. (On pourra considérer séparément les cas $b = 0$ et $b \neq 0$).
   (b) Montrer que g n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 1.
On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par

$$f_1(x,y) = \frac{|x|}{x^2+y^2}$$

$$f_2(x,y) = \frac{x^2}{|x|+|y|}.$$

1. Justifier que f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$
2. Est ce que f_1 est prolongeable par continuité en $(0,0)$?
3. On admet que f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Est ce que f_2 est prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2x - y^5.$$

1. Donner le gradient ∇_f en un point (x,y).
2. Justifier *en détail* que f est une fonction $\mathscr{C}^1$.
3. Calculer la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial w}(v)$ au point $v = (1,1)$ et dans la direction $w = (1,-3)$.