CC 3 Mat 303 Corrigé 6/12/2022.

(Barème en rouge)

Questions de cours → apprendre son cours ! → 7 points faciles

1. a) il suffisait de dire que f admet une dérivée partielle en $\vec{0}$ selon

(1) x équivaut à $\varphi(t)=f(t,0)$ est dérivable en 0 ; pour y : $\psi(t)=f(0,t)$.

b) penser à dire que toutes les dérivées partielles existent et

(1) sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

c) La définition de différentiable n'est ni C^1 (trop fort) ni

(1) l'existence de dérivées partielles (trop faible). C'est : il existe une application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que le rapport

$$\frac{1}{\|\vec{h}\|}\cdot\left(f(\vec{0}+\vec{h})-f(\vec{0})-\Phi(\vec{h})\right)\xrightarrow[\vec{h}\to\vec{0}]{}0.$$

On appelle alors Φ la différentielle de f en $\vec{0}$, et on la note $Df_{\vec{0}}$.
(Introduire la notation seulement après avoir donné la définition, c'est plus élégant et ça évite les aberrations logiques).

d) Le grand oublié du semestre ! Gateaux-dérivable signifie

(1) qu'il existe des dérivées directionnelles dans toutes les directions.
Lorsqu'elle existe, la dérivée directionnelle de f en $\vec{0}$ selon la direction $\vec{w}$ est la dérivée en 0 de la fonction $\gamma(t)=f(\vec{0}+t\vec{w})$.

(3) Les implications : $(b) \overset{(1)}{\Rightarrow} (c) \overset{(1)}{\Rightarrow} (d) \overset{(1)}{\Rightarrow} (a)$ (Toutes les réciproques sont fausses !)

2. Exemple du cours, ou équivalent vu en TD :

$f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ si $x\neq 0$, $f(0,y)=0$.

(2) On a $f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=n\to+\infty$ donc f n'est pas bornée au voisinage de 0. Elle n'est donc pas continue. Mais, si $\vec{w}=(w_1,w_2)$

$$\gamma(t)=f(tw_1,tw_2)=\begin{cases} w_2/w_1 & \text{si } w_1\neq 0\\ 0 & \text{si } w_1=0\end{cases}$$ donc est dérivable en 0 $\forall\vec{w}\in\mathbb{R}^2$.

Ex. 1 1. a) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est un quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. C'est donc une fonction continue là où le dénominateur ne s'annule pas (sur son domaine de définition). Or, $x^2+y^2=0 \iff (x,y)=\vec{0}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$.

① b) On remarque : $f(t,0)=1$, $f(0,t)=-1$, $f(t,t)=0$

② On peut aussi remarquer en polaires : $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\cos 2\theta$.

Si f était prolongeable par continuité en O, elle admettrait une limite finie ℓ en $\vec{0}$. Et alors, $\lim\limits_{t\to0} f(t,0)=\lim\limits_{t\to0} f(t,t)=\ell$

car $(t,0)\underset{t\to0}{\longrightarrow}\vec{0}$, $(t,t)\underset{t\to0}{\longrightarrow}\vec{0}$.

Par conséquent, f n'est clairement pas prolongeable par continuité en $\vec{0}$.

② 2) À nouveau, la question est de savoir si $g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}$ admet une limite en $\vec{0}$. On voit facilement que $g(t,0)=|t|\underset{t\to0}{\longrightarrow}0$ donc si cette limite existe, ça doit être 0. Il suffit donc de majorer g au voisinage de $\vec{0}$.

Voici la meilleure majoration vue dans une copie :

$x^2-y^2=(|x|+|y|)(|x|-|y|)$

donc $|g(x,y)|=\big||x|-|y|\big|\leq|x|+|y|$ par l'inégalité triangulaire

Car $|x|+|y|\underset{(x,y)\to\vec{0}}{\longrightarrow}0$, il vient $g(x,y)\underset{(x,y)\to\vec{0}}{\longrightarrow}0$ donc

on peut bien prolonger g par continuité en $\vec{0}$ en posant $g(\vec{0})=0$.

Remarques : La majoration la plus naturelle (ou la plus facile à généraliser) serait :

$$|g(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$$ qui est une forme indéterminée

Pour obtenir une majoration exploitable, il faut minorer le dénominateur. Pour cela, nous avons l'inégalité évidente :

$|x|+|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$. Il vient $|g(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Si on passe en polaires, on se retrouve avec :

$$g(x,y) = \frac{r^2}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}$$. Il faut donc donner

un argument précis et correct du fait que $|\cos\theta|+|\sin\theta| \geq c > 0$ pour $\theta \in [0,2\pi[$. À nouveau, en élevant au carré on peut voir que $c=1$ convient. Sinon, un argument sympathique en Mat303 est que $\theta \mapsto |\cos\theta|+|\sin\theta|$ est continue sur $[0,2\pi]$, compact, donc atteint ses bornes. Or $|\cos\theta|+|\sin\theta| > 0$ $\forall \theta \in [0,2\pi]$ donc $\exists c > 0$ et on finit avec $|g(x,y)| \leq c\, r$.

<u>Ex. 2</u> 1) f est un polynôme donc clairement dérivable par rapport à toutes les variables, et on calcule :

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2x + 3z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 6yz - 16z^3,$$ toutes ces dérivées partielles

sont continues sur $\mathbb{R}^3$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

2) Comme vu précédemment, $C^1 \Rightarrow$ Gateaux dérivable donc

(2) la réponse est oui.

3) On peut s'amuser à revenir à la définition : $\vec{u}+t\vec{w}=(1+t,1+2t,3t)$

$$\frac{1}{t}\left(f(\vec{u}+t\vec{w})-f(\vec{u})\right)=\frac{1}{t}\left(2(1+t)(1+2t)+3(1+2t)(3t)^2-4(3t)^4-2\right)$$

$$=\frac{1}{t}\left(2-2+6t+t^2q(t)\right) \quad \text{où } q \text{ est un polynôme en } t$$

$$=6+t\,q(t)$$

donc la limite existe et vaut 6.

Plus simplement, car f est de classe $\mathcal{C}^1$ (différentiable suffirait), on peut utiliser la formule : $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(\vec{u})=Df_{\vec{u}}(\vec{w})$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{u})\,w_i$$

2

$$=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$=2+4=6.$$

4) Question bonus ! On a $\max(|x|,|y|,|z|)\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ donc

2 $|f(x,y,z)|\leq 2r^2+3r^3+4r^4$ en posant $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, i.e. $f=o(r)$.

et par suite $\frac{1}{r}f(x,y,z)\xrightarrow[r\to 0]{}0$

Ceci équivaut à écrire $f(x,y,z)=f(\vec{0})+\underbrace{O(x,y,z)}_{\text{application linéaire nulle}}+o(\|(x,y,z)\|)$.

donc démontre que f est différentiable en $\vec{0}$, et que sa différentielle est nulle.