MAT303

Deuxième CC. Mardi 8 novembre. Durée de l'épreuve : 2h.

Exercice 1 : autour du cours

1. Donner la définition d'un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^d$. (La caractérisation en termes de suites ne sera pas acceptée). Montrer que si F est fermé et $(f_n)_n$ est une suite convergente telle que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la limite $f = \mathsf{lim}_n f_n$ est dans F.
2. Donner la définition d'un ensemble compact. (La réponse « c'est un ensemble fermé et borné » ne sera pas acceptée). Justifier que $[0,1] \times [0,1]$ est compact dans $\mathbb{R}^2$. Si vous utilisez le théorème de Bolzano-Weierstrass, vous devez l'énoncer clairement.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Sous quelle condition dit-on que f est uniformément continue ? Donner un critère sur la dérivée f' d'une fonction dérivable qui garantit que f est uniformément continue. La fonction $f(x) = \mathsf{cos}(x)\,\mathsf{sin}(x)$ est-elle uniformément continue ?
4. Donner un exemple d'ensemble qui n'est ni ouvert ni fermé. Justifier votre réponse.

Exercice 2 On pose $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y - x^2 \leq 1\}$.

1. L'ensemble F est-il borné ?
2. Montrer que F est fermé en utilisant la caractérisation en termes de suites.
3. Ecrire F comme l'image réciproque $f^{-1}(S)$ d'un ensemble $S \subset \mathbb{R}$ par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que vous identifierez précisément. En déduire une seconde démonstration du fait que F est fermé.
4. F est-il ouvert ?
5. F est-il compact ?

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $B = (e_1, e_2)$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ un nombre strictement positif. Rappelez la définition de « la boule ouverte de centre v et de rayon r dans la base B ».

   Nous noterons la boule ouverte de centre v et rayon r dans la base B par $\mathcal{B}_B(v,r)$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_B(v,r)$ est un ensemble borné. (Indication : il suffira de montrer qu'il est borné par rapport à la norme $|| \cdot ||_B$.)
3. Donner un exemple d'ensemble ouvert qui n'est pas borné. Justifier votre réponse.
4. Calculer $\mathcal{B}_B(\overline{0},1)$ quand B est la base $((1,0);(0,2))$. Est-ce que cet ensemble est également une boule ouverte centrée en $\overline{0}$ dans la base canonique ?

Exercice 4. On dit qu'un ensemble $S \in \mathbb{R}^d$ est discret s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x, y \in S$ tels que $x \neq y$ on a que $d_{BC}(x,y) > \epsilon$.

1. Justifier que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est discret.
2. Justifier que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ est discret.
3. Est-ce que l'ensemble $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret ?
4. Soit S un ensemble discret. Justifier que toute suite de Cauchy dans S est constante à partir d'un certain rang.
5. Justifier que tout ensemble discret est fermé.