MAT303 (2022-2023)

Premier contrôle continu du mardi 11 octobre
Durée de l'épreuve : 1h.

Documents et téléphones portables interdits.
La rédaction et la précision des arguments seront des critères importants d'évaluation

Question 1 : autour du cours.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. A quelle condition dit-on que f est continue ?
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Donner la définition d'un sous ensemble de E ouvert par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que si la suite (v_n) converge vers v et la suite (u_n) converge vers u alors la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $u - v$.
4. Soit $v = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur dans $\mathbb{R}^n$. Justifier que pour tout $i \leq n$ on a que $||v|| \geq |x_i|$.

Question 2 : révisions de Mat 203
Justifier vos réponses soigneusement.

1. Soient A et B deux sous-ensembles bornés et non vides de $\mathbb{R}$ et soit
$$A - B = \{a - b | a \in A, b \in B\}.$$
Montrer que $A - B$ est borné et que $\mathsf{sup}(A) - \mathsf{inf}(B)$ est le suprémum de $A - B$.

Question 3 : convergence des suites.
Pour chacune des suites, dire si elle est majorée ou minorée. Calculer le sup des suites majorées et l'inf des suites minorées. Est ce que ce sont des maximums ou minimums ?

1. $u_n = \frac{2+n}{3n+4}$
2. $u_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$.
3. $u_n = n^2 - 3n + 1$.

Donner un exemple d'une suite bornée qui ne converge pas.

Question 4 : continuité.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall \epsilon > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$
Que pouvez vous dire sur la fonction f ?