MAT303

CC2. Vendredi 12 novembre. Durée de l'épreuve : 2h.

Documents et téléphones portables interdits. La rédaction et la précision des arguments seront des critères importantes d'évaluation

Question 1 : autour du cours.

1. Donner la définition d'une fonction continue. *Le critère que f est continue si et seulement $x_n \to x$ implique que $f(x_n) \to f(x)$ ne sera pas accepté.*
2. Montrer que f est continue si et seulement pour chaque suite $x_n \to x$ on a que $f(x_n) \to f(x)$.
3. En déduire que si f et g sont deux fonctions continue alors $f + g$ est une fonction continue.

Question 2.

On considère l'ensemble A donné par

$$A = \{(x, y) | x^2 + 3y^2 \leq 4\}.$$

1. Montrer que A est fermé de deux façons différentes :
   (a) en considérant des suites convergentes d'éléments $v_n \in A$,
   (b) en écrivant A dans la forme $f^{-1}(S)$ pour un choix approprié de f et S. *Vous devez établir toute propriété de la fonction f qui est nécessaire à votre argument*.
2. Est ce que l'ensemble A est borné ? Justifier votre réponse.
3. Justifier que chaque suite d'éléments de A admet une sous suite convergente. *Vous pouvez utiliser un résultat du cours sans démonstration, mais vous devez en donner l'énoncé complet*.
4. On considère la fonction $f : (x, y) \to x + y$. Justifier que pour tout $(x, y) \in A$ on a que $f(x, y) \leq 4$.
5. Justifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ on a que $||(x, y)|| \geq |x|, |y|$ et déduire que f est une fonction continue. *Il est attendu ici que vous démontrez que*
6. *Soit $s = \sup f(A)$. Justifier qu'il existe une suite s_n de nombre réels telle que*
   (a) Pour tout n on a $s_n \in f(A)$
   (b) Pour tout n on a $s - \frac{1}{n} < s_n \leq s$.
7. *Montrer qu'il existe un point $v \in A$ tel que $f(v) = s$. Indice : on pourrait considérer une suite v_n telle que $f(v_n) = s_n$.*

Question 2.

1. Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue.
2. Justifier que la fonction $x \to x^3$ n'est pas uniformément continue. *Vous pouvez utiliser un résultat du cours sans démonstration, mais vous devez en donner l'énoncé complet*.

3. On dit qu'une fonction f est lipschitizienne si et seulement si il existe une constante C telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a que

$$|f(x) - f(y)| < C|x - y|.$$

Montrer que toute fonction lipschitizienne est uniformément continue.

4. On considère les fonctions $f_\alpha(x) = x^\alpha$ sur $[0, \infty[$.
   (a) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle lipschitizienne sur $[1, \infty[$? On pourra utiliser le théorème des accroisements finis.
   (b) Pour quelle valeurs de α la fonction f_α est-elle lipschitizienne sur $[0, \infty[$?
   (c) Pour quelles valeurs de α la fonction f_alpha est-elle uniformémemnt continue sur $[1, \infty[$?
   (d) Pour quelle valeurs de α la fonction f_α est-elle uniformement continue sur $[0, \infty[$?