MAT303

Premier CC. Mardi 12 octobre. Durée de l'épreuve : 1h.

Documents et téléphones portables interdits. La rédaction et la précision des arguments seront des critères importantes d'évaluation

Question 1 : autour du cours.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur. Quelle est la définition du longueur euclidienne standard du vecteur v ?
2. Enoncer l'inégalité triangulaire par rapport à deux vecteurs v et w dans $\mathbb{R}^d$ et la longueur euclidienne standard.
3. Soit v_n une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^d$. Donner la définition de "la suite v_n converge vers une limite v dans $\mathbb{R}^d$ par rapport à la distance euclidienne standard".
4. Montrer que si la suite (v_n) converge vers v et la suite (u_n) converge vers u alors la suite $(u_n + 3v_n)$ converge vers $u + 3v$.

Question 2 : révisions de Mat303

Les deux questions sont indépendentes. Justifier vos réponses soigneusement.

1. Soient A et B deux sous ensembles bornés et non vides de $\mathbb{R}^+$ et soit
$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}.$$
Montrer que $\sup(A) \times \sup(B)$ est un majorant de AB. Montrer que
$$\sup(A) \times \sup(B) = \sup(AB).$$
2. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont équivalents à dire que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0 et $f(0) = 1$? (Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte).
   (a) $\forall \epsilon \geq 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$.
   (b) Pour toute suite (u_n) telle que $u_n \to 0$ on a que $f(u_n) \to 1$.
   (c) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 0$.
   (d) Si la suite $f(u_n)$ converge vers 0 alors (u_n) converge vers 1.
   (e) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que $|x| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon/2$.

Question 3 : topologie dans $\mathbb{R}^d$.

Dire si l'ensemble suivant est 1) fermé 2) borné 3) ouvert.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$