Université Grenoble Alpes | **Année 2023-2024**
Licence de sciences, 2e année | **MAT 303**

Deuxième contrôle continu

Vendredi 27 octobre 2023

Durée : 2 h.
Documents, téléphones portables, objets connectés interdits.
Les exercices sont indépendants.
La rédaction et la précision des arguments sont des critères importants d'évaluation.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points)

1) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On suppose que A est fermée. Montrer que $\sup A \in A$.
2) Donner la définition d'un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que si U est un ouvert non vide et $x \in U$, il n'existe aucune suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \notin U$, et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
3) Donner un exemple d'ensemble dans $\mathbb{R}^2$ qui n'est ni ouvert ni fermé. Justifier votre réponse.

Exercice 2. (5 points)
On pose $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 1 \text{ et } |x| \leqslant 2\}$.

1) L'ensemble F est-il borné ?
2) Montrer que F est fermé en utilisant la caractérisation en termes de suites.
3) F est-il ouvert ?
4) F est-il compact ?

Exercice 3. (7 points)
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$, et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r. L'image réciproque d'un sous-ensemble Y de $\mathbb{R}^m$ est l'ensemble $f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in Y\} \subset \mathbb{R}^n$.

1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la définition de « f est continue en x_0 ». On suppose dans la suite que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
2) On pose $y_0 = f(x_0)$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B(y_0, r)$.
3) Montrer que l'image réciproque de la boule $B(y_0, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
4) On se place dans le cas $n = m = 2$ et $f(x, y) = (x^2, y)$. On admettra que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Quel est l'ensemble $f(\mathbb{R}^2)$? Est-ce que l'image par f d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est toujours un ouvert ?
   (b) Montrer que l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)^2 + y^2 < 4\}$ est l'image réciproque d'une boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ que l'on explicitera. En déduire qu'il est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
5) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Montrer que l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4. (4 points)
On note $B \subset \mathbb{R}^2$ la boule ouverte de centre $(1, 0)$ et de rayon 2.

1) Montrer que toute suite à valeurs dans B admet une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}^2$.
2) Quels sont les points de $\mathbb{R}^2$ qu'on peut atteindre comme limites de suites d'éléments de B ?