Partiel MAT 303 (oct. 2023)

Exo 1

1) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(\sup A)-\frac{1}{n}$ ne majore pas A, donc on peut prendre $x_n\in A$ t.q.

$$(\sup A)-\frac{1}{n}\le x_n\le \sup(A)$$

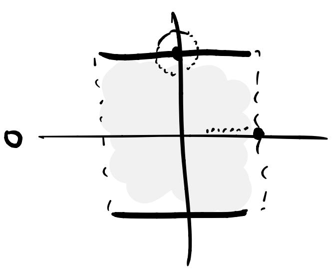
en particulier $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sup(A)$.

Comme A est fermé, $\sup(A)\in A$.

2) $U\subset\mathbb{R}^d$ est ouvert si $\forall x\in U, \exists \varepsilon>0$ t.q. $B(x,\varepsilon)\subset U$.

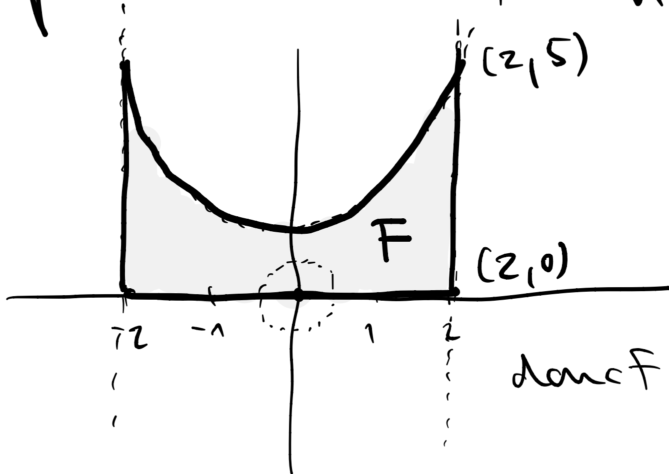
Soit U ouvert et $x\in U$. $U^c=\mathbb{R}^d\setminus U$ est fermé, donc si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ et $\forall n, x_n\in U^c$ alors par caractérisation séquentielle des fermés, $x\in U^c$, contradiction.

3) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1 \text{ et } |y|\le 1\}$.



- C pas ouvert : $(0,1)\in C$, mais $\forall\varepsilon>0$ $(0,1+\frac{\varepsilon}{2})\in B((0,1),\varepsilon)\setminus C$, donc $B((0,1),\varepsilon)\not\subset C$.
- C pas fermé : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(1-\frac{1}{n},0)\in C$, et $(1-\frac{1}{n},0)\xrightarrow{n\to\infty}(1,0)\notin C$.

Exo 2



1) pour tout $(x,y)\in F$, $|x|\le 2$, donc $0\le y\le 1+x^2\le 1+2^2=5$, $0\le y^2\le 25$.

On a alors $\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

donc F est borné, $\forall (x,y)\in F$, $\|(x,y)\|\le\sqrt{29}$

2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $v\in\mathbb{R}^2$.

On écrit $v=(x,y)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=(x_n,y_n)$.

$(x_n,y_n)\xrightarrow{n\to\infty}(x,y)$ implique $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ et $y_n\xrightarrow{n\to\infty}y$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\in F$ donc $-2\le x_n\le 2$ et $0\le y_n\le 1+x_n^2$

donc $-2\le x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\le 2$

et $0\le y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n\le \lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n^2)=1+x$

ce qui donne $v\in F$.

3) $(0,0)\in F$ mais $\forall\varepsilon>0$, $B((0,0),\varepsilon)\not\subset F$ car $(0,-\frac{\varepsilon}{2})\in B((0,0),\varepsilon)\setminus F$

4) On a vu en cours que F compact $\Leftrightarrow$ F fermé et borné.

par les questions 1) et 2) on a F compact.

Exo 3. 1) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ t.q. $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$.

2) on prend $\delta>0$ t.q. $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(x_0)\|<r$.

alors $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),r)$, car

si $u\in f(B(x_0,\delta))$, disons $u=f(x)$ pour $x\in B(x_0,\delta)$

alors $\|x-x_0\|<\delta$, donc $\|f(x)-f(x_0)\|<r$, ce qui donne

$f(x)=u\in B(f(x_0),r)$.

3) Soit $x\in f^{-1}(B(y_0,r))$, $y=f(x)\in B(y_0,r)$.

On prend $r'>0$ t.q. $B(y,r')\subset B(y_0,r)$ (ça existe car $B(y_0,r)$ est ouvert)

Soit $\delta>0$ t.q. $f(B(x,\delta))\subset B(y,r')$ (ça existe par la question 2))

Comme $B(y,r')\subset B(y_0,r)$, on a aussi $f(B(x,\delta))\subset B(y,r')$

ce qui donne $B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(y_0,r))$.

4) a) $f(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}=[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, qui n'est pas ouvert.

$\mathbb{R}^2$ ouvert, $f(\mathbb{R}^2)$ pas ouvert, donc en général, l'image d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert.

b) $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)\in B((1,0),2)\}=f^{-1}(B((1,0),2))$

par la question 3), X est ouvert.

5) Soit $u\in f^{-1}(V)$, c.à.d. $f(u)\in V$; on note $v=f(u)$.

Soit $\varepsilon>0$ t.q. $B(v,\varepsilon)\subset V$ (ça existe car V est ouvert)

On choisit $\delta>0$ t.q. $f(B(u,\delta))\subset B(v,\varepsilon)$ (ça existe par le résultat de 3)).

Alors

$$B(u,\delta)\subset f^{-1}(B(v,\varepsilon))\subset f^{-1}(V).$$

Exo 4

1) On note $B = B((1,0),2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x-1,y)\| < 2\}$
$\overline{B} = \overline{B}((1,0),2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x-1,y)\| \leq 2\}$

$\overline{B}$ est borné : $\forall v\in B$, $\|v\| = \|v-(1,0)+(1,0)\| \leq \|v-(1,0)\|+1 \leq 3$
$\overline{B}$ est fermé (cf. cours, c'est une boule fermée).

Par Bolzano–Weierstrass, $\overline{B}$ est compact, càd. toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{B}$ admet une sous-suite qui converge

Comme $B\subset\overline{B}$, toute suite à valeurs dans B est une suite à valeurs dans $\overline{B}$, CQFD.

2) Soit $L\subset\mathbb{R}^2$ cet ensemble, montrons que $L=\overline{B}$.

- $B\subset L$ (si $v\in B$, la suite constante $v_n = v$ converge vers v)
- $(\overline{B}\setminus B)\subset L$: si $v\in\overline{B}\setminus B$, $\|v-(1,0)\|=1$, on prend $v_n = (1,0)+(1-\frac{1}{n})(v-(1,0))$
  $\forall n$, $\|v_n-(1,0)\| = (1-\frac{1}{n})\|v-(1,0)\| < 2$, d'où $v_n\in B$, et $v_n \xrightarrow{n\to\infty} v$

Les deux points précédant donnent $\overline{B}\subset L$.
Montrons enfin que $L\subset\overline{B}$.
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans B t.q. $v_n \xrightarrow{n\to\infty} v$, $v\in\mathbb{R}^2$ alors $v\in\overline{B}$, car (v_n) est à valeurs dans $\overline{B}\supset B$ et $\overline{B}$ est fermé.